Theoretische Physik III
Quantenmechanik
SS 2018

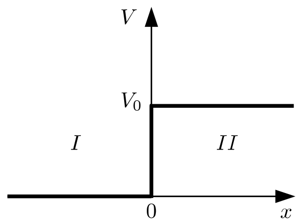
3. Übung

Theoretische Physik (FR NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. HEIKO RIEGER

Ihre Lösung ist bis zum 02.05.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*8 Punkte*] **Reflexion und Transmission an einer Potentialstufe**

Wir betrachten die Streuung eines Teilchens an einer eindimensionalen Potentialstufe. Das Potential hat hierbei die Form $V(x) = V_0 \cdot \theta(x)$.



6 (a) Berechnen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Streuung eines Teilchens der Energie E. Unterscheiden Sie die Fälle $E > V_0$ und $0 < E < V_0$ und gehen Sie davon aus, dass das Teilchen aus dem negativ-Unendlichen kommt.

2 (b) Betrachten Sie eine Potentialstufe der Höhe $V_0 = 10\,eV$, auf die ein Elektron der Energie $E = 9\,eV$ trifft. Die Wellenfunktion fällt im Bereich II exponentiell ab, weshalb die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in diesem Bereich von Null verschieden ist. Die Eindringtiefe L eines Teilchens wird definiert als Inverses der Zerfallskonstante λ des exponentiellen Abfalls der Wellenfunktion $\psi(x) = e^{-\lambda x}$. Berechnen Sie die Eindringtiefe L des Elektrons in den Bereich II.

2. [*9 Punkte*] **Zweizustandssystem**

Betrachten Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ mit der Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} \Delta & A \\ A & -\Delta \end{pmatrix}$ in der gewählten Basis.

2 (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$ in der gewählten Basis.

2 (b) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\Psi_0\rangle = |\Psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Stellen Sie $|\Psi_0\rangle$ in der Eigenbasis von $\hat{H}$ dar.

3 (c) Bestimmen Sie den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ des Systems für beliebige Zeiten t. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(t)$ findet man das System zu einem beliebigen Zeitpunkt t wieder in seinem Anfangszustand $|\Psi_0\rangle$?

2 (d) Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $\hat{\sigma}^z$ im Zustand $|\Psi(t)\rangle$.
$\hat{\sigma}^z$ hat in der gewählten Basis die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. [*7 Punkte*] **Paritätsoperator**

Der Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ ist in der Ortsdarstellung definiert durch $\hat{\Pi}\,|x\rangle = |-x\rangle$, wobei $|x\rangle$ der Eigenket des Ortsoperators $\hat{x}$ zum Eigenwert x ist.

2 (a) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^\dagger = \hat{\Pi}^{-1}$ und $\hat{\Pi}^2 = 1$ gilt.

2 (b) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi}$ die Eigenwerte ± 1 hat und die zugehörigen Eigenfunktionen in Ortsdartstellung die geraden bzw. ungeraden Funktionen sind.

3 (c) Der Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ ist in der Impulsdarstellung definiert durch $\hat{\Pi}\,|p\rangle = |-p\rangle$, wobei $|p\rangle$ der Eigenket des Impulsoperators $\hat{p}$ zum Eigenwert p ist.
Ein Operator $\hat{A}$ heißt gerade (ungerade), wenn $\hat{\Pi}\hat{A}\hat{\Pi}^\dagger = \hat{A}$ ($\hat{\Pi}\hat{A}\hat{\Pi}^\dagger = -\hat{A}$) gilt.
Zeigen Sie, dass der Ortsoperator $\hat{x}$ und der Impulsoperator $\hat{p}$ ungerade Operatoren sind. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{p}^2, \hat{\Pi}]$ und $[\hat{H}, \hat{\Pi}]$ für den Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$, dessen Potential die Eigenschaft $V(\hat{x}) = V(-\hat{x})$ besitzt. Was kann man folglich über die Eigenzustände des Hamiltonoperators aussagen?

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
`sadjadi@lusi.uni-sb.de`
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
`johannes@lusi.uni-sb.de`

4. [*16 Punkte*] **Der Paritätsoperator und das Doppel-Delta-Potential**

Betrachten Sie das Doppel-Delta-Potential (siehe Abbildung 1), das gegeben ist durch

$$V(x) = -\alpha\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$$

mit den positiven, reelen Konstanten a und α. Da für dieses Potential $V(-x) = V(x)$ gilt, ist hier die Parität eine „gute“ Quantenzahl. Dies bedeutet, dass die Lösungen Eigenfunktionen des Paritätsoperators $\hat{\Pi}$ zu den Eigenwerten ± 1 sind ($\hat{\Pi}\psi(x) = \psi(-x) = \pm\psi(x)$). Die Lösungen sind also entweder gerade oder ungerade unter $x \to -x$.

(a) Wie viele gebundene Zustände gibt es?

2 i. Setzen sie zunächst für die drei verschiedenen Raumbereiche Lösungsfunktionen an.

4 ii. Benutzen Sie dann die dem Problem entsprechenden Rand- und Stetigkeitsbedingungen, um die unbekannten Faktoren zu bestimmen.

4 iii. Bestimmen Sie sowohl die gerade als auch die ungerade Lösung graphisch.
Hinweis: Nach einer Substitution erhalten Sie Gleichungen der Form $e^{-y} = \pm 1 \mp cy$.

6 (b) Finden Sie die erlaubten Energien der gebundenen Zustände für

i. $\alpha = \hbar^2/(ma)$

ii. $\alpha = \hbar^2/(4ma)$

und skizzieren Sie die Wellenfunktionen.
Sind die Wellenfunktionen Eigenzustände des Paritätsoperators?

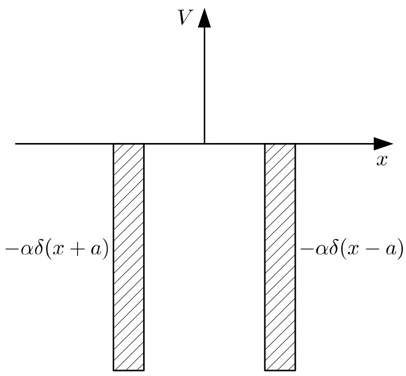


Abbildung 1: Doppel-Delta-Potential

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 johannes@lusi.uni-sb.de