Theoretische Physik III
Quantenmechanik
SS 2018

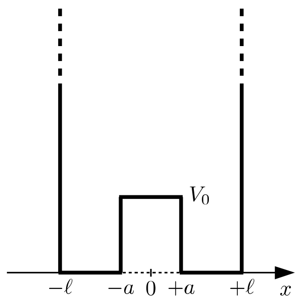
4. Übung

Theoretische Physik (FR NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 09.05.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*22 Punkte*] **Doppelmuldenpotential / Zweizustandssystem**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem eindimensionalen, unendlich tiefen Potentialtopf, in dessen Mitte sich eine Potentialbarriere der Höhe V_0 befindet:



$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für } |x| < a \\ \infty & \text{für } |x| \geq \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \qquad (*)$$

mit $\ell > a > 0$.

Das Modell beschreibt unter anderem zum Beispiel das N-Atom in einem Ammoniakmolekül (NH_3), wobei die Potentialbarriere zwischen den beiden Mulden die abstoßende Coulombwechselwirkung zwischen dem N-Atom und den H-Atomen repräsentiert.

Hinweis: Die Aufgabenteile (a), (b) und (c) können auch unabhängig voneinander bearbeitet werden, falls Sie einen Aufgabenteil nicht lösen können.

4 (a) Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie E_1 für den Fall $V_0 = \infty$. E_1 ist zweifach entartet, es gibt also zwei linear unabhängige Eigenfunktionen zu diesem Energieeigenwert. Bestimmen Sie die beiden normierten Grundzustandswellenfunktionen. Wir bezeichnen die Grundzustände als u_L und u_R, wobei u_L (u_R) für den Zustand steht, in dem das Teilchen sich in der linken (rechten) Mulde befindet.

Hinweis: Sie können die bekannten Lösungen für den unendlich tiefen Potentialtopf benutzen.

(b) Hat die Potentialbarriere eine endliche Höhe, so kann sich das Teilchen durch den Tunneleffekt zwischen beiden Mulden bewegen und die in (a) angesprochene Entartung ist aufgehoben. Wir betrachten das Problem zuerst phänomenologisch und berücksichtigen nur den Zustandsraum, der von den beiden orthogonalen Vektoren $|u_L\rangle$ und $|u_R\rangle$ aufgespannt wird. In der $\{u_L, u_R\}$-Basis hat der Hamiltonoperator $\hat{H}$ die folgende Matrixdarstellung:

$$H = \begin{pmatrix} \langle u_L|\hat{H}|u_L\rangle & \langle u_L|\hat{H}|u_R\rangle \\ \langle u_R|\hat{H}|u_L\rangle & \langle u_R|\hat{H}|u_R\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & -\Delta \\ -\Delta & E_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei $\Delta > 0$ den Tunneleffekt charakterisiert.

3 i. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenzustände als Linearkombinationen von $|u_L\rangle$ und $|u_R\rangle$.

4 ii. Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand

$$|\varphi(t=0)\rangle = c_L\,|u_L\rangle + c_R\,|u_R\rangle$$

mit $c_L, c_R \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie den Zustand $|\varphi(t > 0)\rangle$.

3 iii. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand $|u_R\rangle$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Zustand $|u_L\rangle$ zu finden, als Funktion von t.

8 (c) Betrachten wir die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] v(x) = E v(x)$$

für das in $(*)$ angegebene Potential $V(x)$ mit endlichem V_0. Formulieren Sie die Bestimmungsgleichung für die Energieeigenwerte im Fall $E < V_0$.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
`sadjadi@lusi.uni-sb.de`
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
`johannes@lusi.uni-sb.de`

2. [*7 Punkte*] **Streuung an einem beliebig lokalisierten Potential**

Gegeben sei ein Potential

$$V(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ,$$

wobei $f(x)$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b) = 0$ ist. Zeigen Sie mithilfe der Wronskideterminante, dass für die Transmissionskoeffizienten einer von links (l) und einer von rechts (r) einlaufenden Welle gilt: $T_l = T_r$.

3. [*11 Punkte*] **Eindimensionaler harmonischer Oszillator**

Der Hamiltonoperator des quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \quad .$$

Bei ihm handelt es sich um ein sehr bedeutendes Modellsystem. Es wird häufig genutzt, um Potentiale in der Umgebung ihrer Minima analytisch zu approximieren (falls die zweite Ableitung dort nicht verschwindet). Der Hamiltonoperator kann in sehr einfacher Form durch die Leiteroperatoren

$$\hat{a} := \frac{m\omega\hat{x} + \imath\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad \text{(Absteigeoperator)} \quad , \quad \hat{a}^\dagger := \frac{m\omega\hat{x} - \imath\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad \text{(Aufsteigeoperator)}$$

ausgedrückt werden: $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. Die Eigenwerte des Hamiltonoperators sind $E_n = (n + \frac{1}{2})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

$\boxed{4}$ (a) Wie lauten die Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators im Energieeigenzustand $|n\rangle$ mit Eigenwert E_n?

$\boxed{7}$ (b) Berechnen Sie die Standardabweichungen von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ im Energieeigenzustand $|n\rangle$. Verifizieren Sie mit diesen Werten die Unschärferelation.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
`sadjadi@lusi.uni-sb.de` `johannes@lusi.uni-sb.de`