5. Übung

Theoretische Physik (FR NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 16.05.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*12 Punkte*] **Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators**

Die Eigenzustände des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ werden auch als kohärente Zustände bezeichnet:

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad . \tag{$*$}$$

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass

$$|\alpha'\rangle = N e^{\alpha' \hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

ein Eigenzustand von $\hat{a}$ mit Eigenwert $\alpha' \in \mathbb{C}$ ist.

$\boxed{2}$ (b) Schreiben Sie $|\alpha\rangle$ als normierte Superposition der Energieeigenzustände $|n\rangle$.

$\boxed{1}$ (c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, $|n\rangle$ in $|\alpha\rangle$ zu messen, einer Poissonverteilung genügt. Was ist der wahrscheinlichste Wert für n?

$\boxed{2}$ (d) Bestimmen Sie die Unschärfe von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ für den Zustand $|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, dass es sich dabei um die minimal mögliche Unschärfe von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ handelt.

$\boxed{3}$ (e) Zur Zeit $t = 0$ sei ein Teilchen im harmonischen Potential im kohärenten Zustand $|\alpha_0\rangle$. Geben Sie den Zustand des Teilchens für $t > 0$ an. Zeigen Sie, dass sich das Teilchen für alle Zeiten $t > 0$ in einem Zustand der Form ($*$) mit $\alpha \neq \alpha_0$ befindet und damit weiterhin in einem Eigenzustand zu $\hat{a}$ ist. Bestimmen Sie den Eigenwert α für $t > 0$.

$\boxed{2}$ (f) Beschreiben Sie unter Ausnutzung der bisherigen Ergebnisse, wie sich die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ in einem kohärenten Zustand mit der Zeit ändern. Zeigen Sie weiter, dass kohärente Zustände zu allen Zeiten die minimale Orts-Impuls-Unschärferelation erfüllen.

2. [*8 Punkte*] **Anfangswertproblem des harmonischen Oszillators**

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator, der sich zur Zeit $t = 0$ in einem Zustand befindet, der einer Wellenfunktion $\psi(x, 0) = \phi_0(x - x_0)$, wobei $\phi_0(x)$ den Grundzustand des Oszillators darstellt, d. h.

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right] \quad .$$

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass

$$\psi(x, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar}x_0\hat{p}}\phi_0(x)$$

gilt, wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator ist.
Hinweis: Entwickeln Sie die Exponentialfunktion in einer Taylorreihe.

$\boxed{2}$ (b) Schreiben Sie $\psi(x, 0)$ mithilfe des Aufsteigeoperators $\hat{a}^\dagger$ als

$$\psi(x, 0) = e^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger}\phi_0(x) \quad .$$

Hinweis: Nutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$.

$\boxed{2}$ (c) Schreiben Sie $\psi(x, 0)$ als Summe über Eigenzustände ϕ_n des harmonischen Oszillators und berechnen Sie $\psi(x, t)$ mithilfe der allgemeinen Lösungsformel:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\phi_n(x)$$

$\boxed{2}$ (d) Berechnen sie den Erwartungswert $\langle\hat{x}\rangle_t$ des Ortes als Funktion der Zeit.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

3. [*6 Punkte*] **Zeitentwicklung eines harmonischen Oszillators**

Betrachtet wird ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Masse m und Frequenz ω beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0(\hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad .$$

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der harmonische Oszillator in seinem Grundzustand.

3 (a) Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird die Frequenz des Oszillators „plötzlich" von ω nach $\sqrt{2}\omega$ verändert, sodass das Potential $V_1(\hat{x}) = m\omega^2\hat{x}^2$ ist. Eine Messung der Energie wird zu diesem Zeitpunkt durchgeführt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Oszillator in seinem Grundzustand für $V_1(\hat{x})$ anzutreffen.

3 (b) Nach der Änderung des Potentials von V_0 nach V_1 werde keine Messung durchgeführt. Nach einer Zeit τ kehrt das Potential nach V_0 (entspricht der Frequenz ω) zurück. Unter welcher Voraussetzung bzgl. der Größe von τ kehrt der Oszillator mit Sicherheit in den Grundzustand für $V_0(\hat{x})$ zurück?

4. [*6 Punkte*] **Kommutator-Identitäten**

Im Rahmen dieser Aufgabe wird eine wichtige Operatoridentität hergeleitet, die in der Quantenmechanik zahlreiche Anwendungen hat, etwa bei der Berechnung von Matrixelementen oder bei der Zeitentwicklung. Der Kommutator zweier linearer Operatoren $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ ist definiert durch

$$[\hat{X}, \hat{Y}] := \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} \quad .$$

$\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien lineare Operatoren, die im selben endlichdimensionalen Hilbertraum wirken.

(a) Die Ableitung eines Operators, der explizit von einem Parameter t abhängt, ist definiert als

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\hat{A}(t+\varepsilon) - \hat{A}(t)}{\varepsilon} \quad .$$

1 i. Zeigen Sie zunächst, dass

$$\frac{d}{dt}(\hat{A}(t)\hat{B}(t)) = \frac{d\hat{A}(t)}{dt}\hat{B}(t) + \hat{A}(t)\frac{d\hat{B}(t)}{dt}$$

gilt und folgern Sie daraus

$$\frac{d^n}{dt^n}(\hat{A}(t)\hat{B}(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dt^k}\hat{A}(t) \frac{d^{(n-k)}}{dt^{(n-k)}}\hat{B}(t) \quad .$$

3 ii. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\underbrace{[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \ldots [\hat{A}, \hat{B}] \ldots]]]}_{\text{n-mal}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{(n-k)} \hat{A}^k \hat{B} \hat{A}^{(n-k)} \quad .$$

2 (b) Beweisen Sie schließlich:

$$e^{\imath t\hat{A}}\hat{B}e^{-\imath t\hat{A}} = \hat{B} + \imath t[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{(\imath t)^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \ldots + \frac{(\imath t)^n}{n!}[\hat{A}, [\hat{A}, \ldots [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}] \ldots] + \ldots \quad .$$

Hinweis: Führen Sie eine Taylorentwicklung durch und nutzen Sie obige Formel.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
sadjadi@lusi.uni-sb.de johannes@lusi.uni-sb.de

5. [*8 Punkte*] **Orts-Impuls-Unschärferelation / Wellenpakete minimaler Unschärfe**

$\boxed{2}$ (a) Für das Skalarprodukt zweier beliebiger Wellenfunktionen φ und ψ gilt die *Schwarzsche Ungleichung*

$$\langle\varphi|\varphi\rangle\ \langle\psi|\psi\rangle \geq |\,\langle\varphi|\psi\rangle\,|^2 \quad .$$

Sie folgt aus der Tatsache, dass die Norm einer Wellenfunktion nicht negativ ist, sodass $\langle\varphi + \lambda\psi|\varphi + \lambda\psi\rangle \geq 0$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$. Leiten Sie die Schwarzsche Ungleichung her und diskutieren Sie, unter welcher Bedingung Gleichheit erfüllt ist.

$\boxed{3}$ (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung, dass für die Orts- und Impulsunschärfe gilt

$$\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad . \qquad (**)$$

$\boxed{3}$ (c) Für ein minimales Wellenpaket gilt $\Delta x\, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$. Formulieren Sie die Bedingungen für das Gleichheitszeichen in der Relation $(**)$ als eine Differentialgleichung für eine Wellenfunktion, die $\langle\hat{x}\rangle \equiv x_0$ und $\langle\hat{p}\rangle \equiv p_0$ als gegebene Parameter enthält. Bestimmen Sie deren Lösung.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 johannes@lusi.uni-sb.de