

Ihre Lösung ist bis zum 23.05.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [8 Punkte] Bra-Ket-Notation

Gegeben sei ein System, das nur gebundene Zustände hat. Ein Teilchen befinde sich in einem beliebigen Zustand, der durch den normierten Vektor $|\psi\rangle$ beschrieben wird. Die Eigenzustände des Operator \hat{x} seien $|x\rangle$, diejenigen des Hamiltonoperators \hat{H} zum Eigenwert E_n seien $|n\rangle$. Zeigen Sie unter Verwendung von $\psi(n) := \langle n|\psi\rangle$, $\psi(x) := \langle x|\psi\rangle$ und $x_{mn} := \langle m|\hat{x}|n\rangle$ die folgenden Relationen:

- 1 (a) $\langle \hat{H} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |\psi(n)|^2$
- 1 (b) $\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x |\psi(x)|^2$
- 1 (c) $\langle \hat{x} \rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} \psi^*(m) \psi(n) x_{mn}$
- 2 (d) $\sum_{m=0}^{\infty} (E_m - E_n) |x_{mn}|^2 = \frac{\hbar^2}{2M}$, M : Teilchenmasse (Thomas-Reiche-Kuhn Summenregel)
- 1 (e) $\hat{x} = \sum_{m,n=0}^{\infty} x_{mn} |m\rangle \langle n|$
- 1 (f) $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |n\rangle \langle n|$
- 1 (g) Geben Sie eine Interpretation der folgenden Skalarprodukte: $\langle n|\psi\rangle$, $\langle x|\psi\rangle$, $\langle x|n\rangle$, $\langle n|x\rangle$.

2. [9 Punkte] Operatoralgebra

(a) **Fermioperatoren**

Die Operatoren \hat{c} und \hat{c}^\dagger erfüllen die Antikommutatorrelation $\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} := \hat{c}\hat{c}^\dagger + \hat{c}^\dagger\hat{c} = 1$ sowie $\hat{c}^2 = \hat{c}^{\dagger 2} = 0$.

- 1 i. Zeigen Sie, dass der Teilchenzahloperator $\hat{N} := \hat{c}^\dagger\hat{c}$ nur die Eigenwerte 1 und 0 haben kann.
- 2 ii. Nehmen Sie die Existenz eines normierten Eigenzustandes $|0\rangle$ von \hat{N} mit Eigenwert 0 an und konstruieren sie einen normierten Eigenzustand $|1\rangle$ von \hat{N} mit Eigenwert 1. Zeigen Sie, dass sich $|0\rangle$ mithilfe von $|1\rangle$ darstellen lässt und geben Sie die Darstellung explizit an.
- 2 iii. Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle n|\hat{c}|n'\rangle$ und $\langle n|\hat{c}^\dagger|n'\rangle$ (mit $n, n' = 0, 1$) und überprüfen Sie, dass diese Matrizen die richtige Algebra erfüllen.

(b) **Baker-Campbell-Hausdorff-Formel**

Seien \hat{A} und \hat{B} lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

- 2 i.
$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

unter der Voraussetzung, dass $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$.

- 2 ii. Für die Operatorfunktion $f(\hat{B})$ und ihre Ableitung $f'(\hat{B})$ nach \hat{B} gilt

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}] f'(\hat{B}) \quad ,$$

falls $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$.

3. [7 Punkte] Spur eines Operators

Die Spur eines Operators \hat{A} bzgl. eines vollständigen Orthonormalsystems (VONS) $|n_i\rangle$ ist definiert durch:

$$\text{Tr}(\hat{A}) := \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle$$

(Die Konvergenz der Reihe sei vorausgesetzt. Alle folgenden Aussagen sind beweisbar z. B. für Hilbert-Schmidt-Operatoren, für die gilt $\sum_{m,n} |\langle m | \hat{A} | n \rangle|^2 < \infty$.)

- 2 (a) Zeigen Sie, dass die Spur von \hat{A} unabhängig von der Wahl des VONS ist.
- 2 (b) Berechnen Sie $\text{Tr}([\hat{A}, \hat{B}])$.
- 1 (c) Berechnen Sie die Spur von \hat{A} bzgl. einer Basis von Eigenzuständen von \hat{A} .
- 2 (d) Zeigen Sie, dass $\text{Tr}(\ln(\hat{A})) = \ln(\det(\hat{A}))$, wobei $\det(\hat{A}) = \det(\mathbb{A})$ mit $\mathbb{A}_{mn} := \langle m | \hat{A} | n \rangle$.

4. [7 Punkte] Zeitentwicklung des Gauß-Pakets / Orts- und Impulsdarstellung

Gegeben sei die Wellenfunktion eines freien Teilchens in einer Dimension mit dem zugehörigen Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$ zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\psi(x', 0) = \frac{1}{(\pi\Delta^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(ix' \frac{p_0}{\hbar} - \frac{x'^2}{2\Delta^2}\right).$$

Bestimmen Sie die Erwartungswerte folgender Operatoren zum Zeitpunkt $t = 0$:

- 2 (a) \hat{x}^2
- 2 (b) \hat{p}^2
- 2 (c) $\{\hat{x}, \hat{p}\}$
- 1 (d) Verifizieren Sie, dass die Unschärfe minimal ist.

Hinweis:

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/4\alpha}$$

auch für komplexe α und β , sofern $\text{Re}(\alpha) > 0$.

5. [9 Punkte] Zeitentwicklung von Operatoren im Heisenberg-Bild

- 3 (a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)] + i\hbar (\partial_t \hat{A}_S(t))_H.$$

Dabei ist $\hat{U}_S(t, t_0)$ der Zeitentwicklungsoperator mit dem $\hat{A}_H(t) = \hat{U}_S^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S(t) \hat{U}_S(t, t_0)$ gilt. Wie sieht das alles für ein klassisches System aus, das durch die Hamiltonfunktion H beschrieben wird?

- (b) Betrachten Sie nun als Beispiel ein freies Teilchen in einer Dimension:

- 2 i. Bestimmen Sie $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ mit Hilfe von Teil (a), wenn Schrödinger- und Heisenberg-Bild zum Zeitpunkt $t = t_0$ zusammenfallen.
- 2 ii. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{p}_H(t_1), \hat{p}_H(t_2)]$, $[\hat{p}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]$ sowie $[\hat{x}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]$.
- 2 iii. Zur Zeit $t = 0$ sei die Ortsunschärfe des Teilchens $\Delta x_H(0) = \Delta x_0$. Bestimmen Sie $\Delta x_H(t)$ für $t > 0$ aus der Unschärferelation.