7. Übung

Theoretische Physik (FR NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 30.05.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*10 Punkte*] Vollständiger Satz von Operatoren

In einem dreidimensionalen Hilbertraum seien zwei lineare Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{\, |v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \,\}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \hat{A}\,|v_1\rangle &= 2\,|v_1\rangle \quad , & \hat{B}\,|v_1\rangle &= -\imath\,|v_3\rangle \quad , \\ \hat{A}\,|v_2\rangle &= 3\,|v_2\rangle \quad , & \hat{B}\,|v_2\rangle &= \,|v_2\rangle \quad , \\ \hat{A}\,|v_3\rangle &= 2\,|v_3\rangle \quad , & \hat{B}\,|v_3\rangle &= \imath\,|v_1\rangle \quad . \end{aligned}$$

1 (a) Geben Sie die Matrizen an, welche den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{\, |v_1\rangle,\ |v_2\rangle,\ |v_3\rangle \,\}$ zugeordnet sind.

2 (b) Was sind die möglichen Messwerte bei der Messung der von $\hat{A}$ beschriebenen Observable? Geben Sie für jeden möglichen Messwert den Zustand an, in den das System nach der Messung übergeht. Beantworten Sie die obigen Fragen auch für die von $\hat{B}$ beschriebene Observable.

3 (c) Existiert ein gemeinsames System von Eigenzuständen von $\hat{A}$ und $\hat{B}$? Falls ja, bestimmen Sie dieses.

2 (d) Eine Menge der kommutierenden hermiteschen Operatoren (Observablen) heißt „vollständiger Satz von Operatoren“, wenn das gemeinsame System von Eigenzuständen eindeutig ist. Welche der folgenden Mengen bilden einen vollständigen Satz: $\{\hat{A}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{A}, \hat{B}\}$, $\{\hat{A}^2, \hat{B}\}$, $\{\hat{A}, \hat{B}^2\}$?

2 (e) Was sind die möglichen Resultate, wenn die Observablen $\hat{A}$ und dann $\hat{B}$ unmittelbar hintereinander gemessen werden? Geben Sie für jedes Resultat (jedes Paar der möglichen Messwerte zu $\hat{A}$ und $\hat{B}$) den Zustand nach der Messung an. Ist die Antwort anders, wenn die Messung von $\hat{B}$ vor der Messung von $\hat{A}$ durchgeführt wird?

2. [*5 Punkte*] Messprozess

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die Operatoren, die zu den Observablen α und β gehören, mit $\hat{A}\,|\varphi_i\rangle = a_i\,|\varphi_i\rangle$ und $\hat{B}\,|\psi_i\rangle = b_i\,|\psi_i\rangle$ $(i = 1, 2)$. $|\varphi_i\rangle$ und $|\psi_i\rangle$ seien orthonormale Eigenzustände. Weiterhin gelte:

$$|\varphi_1\rangle = N_1\big[2\,|\psi_1\rangle + 3\,|\psi_2\rangle\big] \quad , \quad |\varphi_2\rangle = N_2\big[3\,|\psi_1\rangle - 2\,|\psi_2\rangle\big] \quad .$$

1 (a) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten N_1 und N_2.

2 (b) Die Messung der Observable α liefert das Resultat a_1. Daraufhin erfolgt eine Messung der Observablen β. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei der Messung von β die Ergebnisse b_1 bzw. b_2?

2 (c) Im Anschluss daran erfolgt eine erneute Messung der Observablen α. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dieser Messung der Wert a_2 gemessen wird.

3. [*6 Punkte*] Der harmonische Oszillator im Heisenberg-Bild

Berechnen Sie für die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ des harmonischen Oszillators die Heisenberg-Operatoren $\hat{a}^\dagger_H(t)$ und $\hat{a}_H(t)$ auf zwei Arten:

3 (a) Gehen Sie direkt von $\hat{a}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{a}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ aus.

3 (b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{A}_H(t)\right]$$

für $\hat{A}_H = \hat{a}_H$ bzw. $\hat{A}_H = \hat{a}^\dagger_H$ zu den Anfangsbedingungen $\hat{a}_H(0) = \hat{a}$ bzw. $\hat{a}^\dagger_H(0) = \hat{a}^\dagger$.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

4. [7 *Punkte*] **Statistische Gesamtheit/Dichteoperator**

(a) Wir betrachten polarisierte Photonen. Ein vertikal polarisiertes Photon wird durch den Vektor $|V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben, ein horizontal polarisiertes Photon durch den Vektor $|H\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ein diagonal polarisiertes Photon durch den Vektor $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |H\rangle)$.

$\boxed{2}$ i. Geben Sie die Dichtematrizen der reinen Zustände $|V\rangle$, $|H\rangle$ und $|D\rangle$ an. Berechnen Sie die Dichtematrix eines Gemischs aus 50% vertikal und 50% horizontal polarisierten Photonen.

$\boxed{2}$ ii. Beschreiben Sie den Aufbau eines (Gedanken-)Experiments, welches eine reine Gesamtheit diagonal polarisierter Photonen und eine gemischte Gesamtheit von Photonen unterscheiden kann.

$\boxed{3}$ (b) Welche der unten angegebenen Operatoren stellen Dichteoperatoren dar? Beschreiben sie einen reinen Zustand oder ein Gemisch? Ermitteln Sie im Falle eines reinen Zustands den zugehörigen Zustandsvektor.

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix} \quad , \quad W_2 = \begin{pmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \tfrac{1}{3}\,|u\rangle\langle u| + \tfrac{2}{3}\,|v\rangle\langle v| + \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,|u\rangle\langle v| + \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,|v\rangle\langle u|\,, \quad \text{mit } \langle u|u\rangle = \langle v|v\rangle = 1 \text{ und } \langle u|v\rangle = 0,$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad W_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad .$$

5. [12 *Punkte*] **Bahndrehimpulsoperator**

$\boxed{2}$ (a) Der Operator $\hat{U} = \hat{I} - \imath\varepsilon\hat{F}$ sei unitär. Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{F}$ hermitesch ist. Nehmen Sie dabei an, dass ε eine infinitesimal kleine Zahl ist. Was ist $\hat{F}$ für den Fall, dass $\hat{U}$ der Zeitentwicklungsoperator bzw. der Translationsoperator bzw. der Rotationsoperator ist?

$\boxed{3}$ (b) $\psi(\boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$) sei eine Zustandsfunktion in der Ortsdarstellung für ein System ohne Spin-Freiheitsgrad. Die Wirkung des Rotationsoperators auf $\psi(\boldsymbol{r})$ ist gegeben durch $\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(R^{-1}\boldsymbol{r})$, wobei R eine orthogonale Drehmatrix für eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ mit Drehachse $\boldsymbol{n}$ und Drehwinkel α ist. Betrachten Sie eine infinitesimale Drehung um den Winkel ε und zeigen Sie, dass für eine derartige Drehung

$$\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\varepsilon) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{\imath\varepsilon}{\hbar}\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$$

gilt mit dem Bahndrehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$. Für einen endlichen Drehwinkel α entspricht $\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\alpha) = e^{-\frac{\imath}{\hbar}\alpha\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}}$. Nehmen Sie zur Vereinfachung der Rechnung an, dass die Drehachse in $\boldsymbol{e}_z$-Richtung zeigt.

$\boxed{4}$ (c) Zeigen Sie, dass für die Komponenten $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ des Bahndrehimpulsoperators und die Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm \imath\hat{L}_y$ die folgenden Relationen gelten:

i. $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$ für $i, j, k = x, y, z$

ii. $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_i] = 0$ für $i = x, y, z$ und $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0$

iii. $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$ und $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$

iv. $\hat{L}_\pm\hat{L}_\mp = \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar\hat{L}_z$

$\boxed{3}$ (d) Zeigen Sie des Weiteren:

i. $[\hat{L}_i, \hat{\boldsymbol{p}}^2] = [\hat{L}_i, \hat{\boldsymbol{r}}^2] = 0$

ii. $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\boldsymbol{p}}^2] = [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\boldsymbol{r}}^2] = 0$

iii. $[\hat{L}_i, \hat{H}] = [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{H}] = 0$, falls $\hat{H}$ zentralsymmetrisch ist.
Warum haben $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ eine gemeinsame Eigenbasis?

Hinweis: ε_{ijk} ist das Levi-Civita-Symbol (total antisymmetrische Tensor dritter Stufe):
$\varepsilon_{ijk} = 1$, falls (ijk) eine gerade Permutation von (xyz) ist,
$\varepsilon_{ijk} = -1$, falls (ijk) eine ungerade Permutation von (xyz) ist und
$\varepsilon_{ijk} = 0$ sonst.
Außerdem gilt $\varepsilon_{jmk}\varepsilon_{ikn} - \varepsilon_{imk}\varepsilon_{ikn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}$.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 — sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 — johannes@lusi.uni-sb.de