8. Übung

Theoretische Physik (FR NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 06.06.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*6 Punkte*] **Zeitabhängige Dichteoperatoren**

In der Vorlesung wurde die Zeitabhängigkeit eines Dichteoperators im Schrödinger-Bild gegeben durch

$$\hat{W}_S(t) = \sum_i w_i \,|\psi_i(t)\rangle \langle\psi_i(t)| \quad .$$

2 (a) Drücken Sie $\hat{W}_S(t)$ unter Verwendung des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t,0)$ durch $\hat{W}_S(0)$ aus. Vergleichen Sie dies mit der Zeitentwicklung eines Operators $\hat{A}_H(t)$ im Heisenberg-Bild.

2 (b) Geben Sie die Zeitentwicklung des Erwartungswertes eines Operators $\hat{A}$ in einem durch den Dichteoperator $\hat{W}$ beschriebenen Zustand an.

2 (c) Zeigen Sie, dass ein reiner (gemischter) Zustand im Laufe der Zeit rein (gemischt) bleibt.

Hinweis: Die Bedingung für die Spur des Quadrates der Dichtematrix $\mathrm{Tr}(\hat{W}^2)$ unterscheidet sich für einen reinen und einen gemischten Zustand.

2. [*11 Punkte*] **Messprozess**

Betrachten Sie die folgenden Matrixdarstellungen der Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ über einem dreidimensionalen Hilbertraum:

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\imath & 0 \\ \imath & 0 & -\imath \\ 0 & \imath & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

1 (a) Was sind die möglichen Resultate bei der Messung von $\hat{L}_z$?

2 (b) Berechnen Sie $\langle \hat{L}_x\rangle$, $\langle \hat{L}_x^2\rangle$ und $(\Delta\hat{L}_x)^2 = \langle(\hat{L}_x - \langle\hat{L}_x\rangle)^2\rangle$ in dem Zustand, in dem eine Messung von $\hat{L}_z$ den Wert 1 liefert.

2 (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren von $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_z$.

2 (d) Es sei das System in dem Zustand, der zum Eigenwert -1 von $\hat{L}_z$ gehört. Was sind die möglichen Messergebnisse für $\hat{L}_x$ und wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Ergebnisse?

3 (e) Betrachten Sie den Zustand $|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2}\;\frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ in der Basis, in der $\hat{L}_z$ diagonal ist. In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung, die für die Observable $\hat{L}_z^2$ das Ergebnis $+1$ ergibt? Wie wahrscheinlich ist dieses Messergebnis? Was sind die möglichen Messergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten, wenn $\hat{L}_z$ im Zustand $|\psi\rangle$ gemessen wird?

1 (f) Das System befinde sich in einem Zustand, in dem die Wahrscheinlichkeiten für die Messwerte l_z für $\hat{L}_z$ durch $P(l_z = +1) = \frac{1}{4}$, $P(l_z = 0) = \frac{1}{2}$ und $P(l_z = -1) = \frac{1}{4}$ gegeben sind. Geben Sie den allgemeinen normierten Zustand an, der mit diesen Wahrscheinlichkeiten kompatibel ist.

3. [*6 Punkte*] **Messung von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$**

Der Zustand eines Teilchens sei durch folgende Linearkombination der Drehimpulseigenzustände $|l,m\rangle$ mit $l \geq 1$ gegeben:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\big(\,|l,l\rangle + 2\imath\,|l,l-1\rangle + |l,l-2\rangle\,\big) \quad .$$

2 (a) Welche möglichen Messwerte haben $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$?

2 (b) Wie lauten die Erwartungswerte $\langle\hat{\boldsymbol{L}}^2\rangle$ und $\langle\hat{L}_z\rangle$?

2 (c) Wie groß sind die Unschärfen $\Delta\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\Delta\hat{L}_z$ in diesem Zustand?

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

4. [*4 Punkte*] **Vergleich mit klassischem Drehimpuls**

Zeigen Sie, dass für ein Teilchen mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \hat{V}(r)$ für den Erwartungswert des Drehimpulses in z-Richtung folgende Differentialgleichung gilt:

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{L}_z \rangle = \langle (\hat{\boldsymbol{r}} \times (-\nabla \hat{V}))_z \rangle \quad .$$

5. [*7 Punkte*] **Drehimpulsoperatoren in Kugelkoordinaten**

Bestimmen Sie $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$, $\hat{L}_+$, $\hat{L}_-$ sowie $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ in Ortsdarstellung und verwenden Sie die Kugelkoordinaten r, θ und ϕ.

6. [*6 Punkte*] **Erhaltungsgrößen**

$\boxed{4}$ (a) Ein System mit Hamiltonoperator $\hat{H}$ sei invariant unter der Änderung eines kontinuierlichen Parameters α (z. B. Ort, Zeit, Winkel, etc.), d. h. $\langle \psi_{\alpha_1} | \hat{H} | \psi_{\alpha_1} \rangle = \langle \psi_{\alpha_2} | \hat{H} | \psi_{\alpha_2} \rangle$, wobei $|\psi_\alpha\rangle$ der Zustand zum Wert α ist. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators $\frac{\hbar}{\imath}\frac{\partial}{\partial \alpha}$ dann eine Erhaltungsgröße ist, d. h. sich zeitlich nicht ändert. Gehen Sie davon aus, dass der Zustand analytisch von α abhängt.

$\boxed{2}$ (b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von $\hat{L}_z$ eine Erhaltungsgröße des harmonischen Oszillators ist.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
sadjadi@lusi.uni-sb.de johannes@lusi.uni-sb.de