9. Übung

Theoretische Physik (FR NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 13.06.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*12 Punkte*] **Elektrisches Quadrupolmoment in elektrischem Feldgradienten**

Betrachten Sie ein System mit dem Drehimpuls $l = 1$, dessen Zustandsraum durch die Basis $\{\,|{+1}\rangle\,, |0\rangle\,, |{-1}\rangle\,\}$ der gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ (Eigenwerte $2\hbar^2$) und $\hat{L}_z$ (Eigenwerte $+\hbar$, 0 und $-\hbar$) aufgespannt wird. Das System besitze ein elektrisches Quadrupolmoment und sei einem elektrischen Feldgradienten ausgesetzt, sodass sein Hamiltonoperator lautet:

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2\right) \quad .$$

Dabei sind $\hat{L}_u$ und $\hat{L}_v$ die Komponenten von $\hat{\boldsymbol{L}}$ bezüglich der Richtungen u und v der x-z-Ebene, die einen Winkel von 45° mit der x- bzw. der z-Achse einschließen. ω_0 ist eine reelle Konstante.

$\boxed{3}$ (a) Geben Sie die Matrix an, die $\hat{H}$ in der Basis $\{\,|{+1}\rangle\,, |0\rangle\,, |{-1}\rangle\,\}$ beschreibt. Wie lauten die stationären Zustände des Systems sowie die zugehörigen Energien?
Hinweis: Bezeichnen Sie die Zustände mit $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$ und $|E_3\rangle$ in der Reihenfolge fallender Energien.

$\boxed{3}$ (b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+1}\rangle - |{-1}\rangle\right)$. Wie lautet der Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit t? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messergebnisse einer Messung von $\hat{L}_z$ zur Zeit t.

$\boxed{3}$ (c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_x\rangle_t$, $\langle \hat{L}_y\rangle_t$ und $\langle \hat{L}_z\rangle_t$. Welche Bewegung vollzieht der Vektor $\langle \hat{\boldsymbol{L}}\rangle$?

$\boxed{3}$ (d) Zur Zeit t werde $\hat{L}_z^2$ gemessen.
   i. Gibt es Zeiten, zu denen nur ein Messergebnis möglich ist?
   ii. Nehmen Sie an, diese Messung habe $\hbar^2$ ergeben. Wie lautet der Zustand des Systems unmittelbar nach der Messung? Geben Sie ohne Rechnung seine nachfolgende zeitliche Entwicklung an.

2. [*11 Punkte*] **Teilchen im rotationssymmetrischen Potential / Kugelflächenfunktionen**

Der Hamiltonoperator für ein spinloses Teilchen der Masse m in einem dreidimensionalen Zentralpotential $V(r) = V(|\boldsymbol{r}|)$ ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(r) \quad . \tag{1}$$

$\boxed{3}$ (a) Der Operator der kinetischen Energie in (1) lässt sich in einen Radialanteil und einen Winkelanteil zerlegen. Seine Wirkung auf einen Zustandsvektor in der Ortsdarstellung $\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle$ ist dann gegeben durch

$$\frac{1}{2m}\langle \boldsymbol{r}|\hat{\boldsymbol{p}}^2|\psi\rangle = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2 \boldsymbol{r}\psi = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\langle \boldsymbol{r}|\hat{\boldsymbol{L}}^2|\psi\rangle\right) \quad , \tag{2}$$

wobei das Bahndrehimpulsquadrat $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ den Winkelanteil beschreibt. Verifizieren Sie die folgende Relation für den Bahndrehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}}$, den Ortsoperator $\hat{\boldsymbol{r}}$ und den Impulsoperator $\hat{\boldsymbol{p}}$:

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{\boldsymbol{r}}^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 - (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2 + \imath\hbar\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \quad .$$

Benutzen Sie diese, um die Relation (2) zu zeigen.
Hinweis: Nützliche Formel für das Levi-Civita-Symbol: $\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

$\boxed{1}$ (b) Begründen Sie, warum sich die Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator in (1) in der Form $\varphi(\boldsymbol{r}) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ darstellen lassen, wobei $Y_{lm}(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|l,m\rangle$ die Kugelflächenfunktionen als gemeinsame Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ und $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ in Polarkoordinaten sind.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de

Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

$\boxed{2}$ (c) Im Gegensatz zu der Quantenzahl eines allgemeinen Drehimpulsoperators $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \cdots$ kann die Quantenzahl l nur ganzzahlige Werte annehmen. Begründen Sie dies.

(d) Die Wellenfunktion des betrachteten Teilchens in $V(r)$ sei durch $\psi(\boldsymbol{r}) = (x + y + 3z)\, f(r)$ gegeben.

$\boxed{3}$ i. Ist ψ Eigenfunktion zu $\hat{\boldsymbol{L}}^2$? Wenn ja, geben Sie die entsprechende Quantenzahl l an, wenn nein, die möglichen Werte von l bei einer Messung von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$.

$\boxed{2}$ ii. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an, das Teilchen in verschiedenen m-Zuständen zu finden.

Hinweis: Finden Sie den Zusammenhang zwischen x, y, z und den Kugelflächenfunktionen.

3. [*5 Punkte*] **Virialsatz für das Wasserstoffproblem**

Beweisen Sie für den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r}$$

des Wasserstoffatoms die Operatorbeziehung

$$\frac{\imath}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\right] = 2\hat{T} + \hat{V} \quad .$$

Leiten Sie hieraus eine Relation zwischen den Erwartungswerten $\langle \hat{T} \rangle$ und $\langle \hat{V} \rangle$ für Wasserstoffeigenfunktionen ab und geben Sie $\langle \hat{T} \rangle$ und $\langle \hat{V} \rangle$ an. Was ändert sich, wenn der sphärische harmonische Oszillator mit $V(r) = \mu\omega^2 r^2/2$ betrachtet wird?

4. [*6 Punkte*] **Erwartungswerte für kugelsymmetrische Syteme**

Berechnen Sie die angegebenen Matrixelemente, wobei $|nlm_l\rangle$ die Energieeigenzustände des Wasserstoffatoms bei Vernachlässigung des Spins bezeichnen.

$\boxed{3}$ (a) $\langle n = 2, l = 1, m_l = 0|\, \hat{x}\, |n = 2, l = 0, m_l = 0\rangle$.

$\boxed{3}$ (b) $\langle n = 2, l = 1, m_l = 0|\, \hat{p}_z\, |n = 2, l = 0, m_l = 0\rangle$.

5. [*6 Punkte*] **Messprozess und Übergangswahrscheinlichkeiten**

Der Hamiltonoperator eines quantenmechanischen Systems sei gegeben durch $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, wobei $\hat{H}_0$ nicht explizit zeitabhängig sei. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System in einem Eigenzustand $|a\rangle$ von $\hat{H}_0$, d. h. $|\psi(t = 0)\rangle = |a\rangle$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung zum Zeitpunkt t das System in einem Eigenzustand $|a'\rangle$ von $\hat{H}_0$ zu finden, durch $|\,\langle a'|\hat{T}(t)|a\rangle\,|^2$ gegeben ist. Dabei erfüllt $\hat{T}(t)$ die Integralgleichung

$$\hat{T}(t) = 1 - \frac{\imath}{\hbar}\int_0^t dt'\, \hat{\hat{V}}(t')\hat{T}(t') \quad .$$

Hinweis: Wechselwirkungsbild: $|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t}\,|\psi(t)\rangle$ für Zustände, $\hat{\hat{A}}(t) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{A}(t)e^{-\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t}$ für Operatoren.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de