

## Kontinuierliches Spektrum für d. Zentralproblem

Betrachte die stationären Zustände der SG:

$$\hat{H} \Psi(\underline{r}) = \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \right] \Psi = E \Psi$$

für kugelsymmetrisches Potential  $V(r)$  mit  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ .

Da  $\hat{H}$  mit den Drehimpulsoperatoren  $\hat{L}^2$  &  $\hat{L}_z$  vertauscht, ist die Lösungsfunktion d. SG von der Form:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = f_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

mit Kugelflächenfunktionen  $Y_{\ell m}$  —  $f_\ell = \frac{y_\ell}{r}$  mit  $y_\ell(0) = 0$ .

Für nicht gebundene Zustände ( $E > 0$ ) setzen wir:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad V(r) = \frac{\hbar^2}{2m} U(s), \quad s = kr$$

Radiale SG:

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{s^2} - U(s) \right] y_\ell = 0$$

bzw.

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{d}{ds} + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{s^2} - U(s) \right] f_\ell = 0$$

Freies Teilchen ( $U=0$ ): sphärische Besselsche DGL

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{d}{ds} + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{s^2} \right] f_\ell = 0$$

Lsg.: 1) sphärische Besselfkt.  $j_\lambda(s)$

2)  $\swarrow$  Neumannfkt.  $n_\lambda(s)$

3)  $\swarrow$  Hankelfkt.  $h_\lambda^{(\pm)} = n_\lambda \pm i j_\lambda$

Speziell:  $j_0 = \frac{\sin s}{s}$ ,  $n_0 = \frac{\cos s}{s}$ ,  $h_0^{(\pm)} = \frac{e^{\pm i s}}{s}$

$j_1 = \frac{\sin s}{s^2} - \frac{\cos s}{s}$ ,  $n_1 = \frac{\cos s}{s^2} + \frac{\sin s}{s}$ , etc.

Asympt. für  $s \rightarrow 0$ :  $j_\lambda \sim s^\lambda$  (regulär)

$n_\lambda \sim s^{-\lambda-1}$  (irregulär)

$s \rightarrow \infty$ :  $j_\lambda \sim \frac{1}{s} \sin\left(s - \frac{\lambda\pi}{2}\right)$

$n_\lambda \sim \frac{1}{s} \cos\left(s - \frac{\lambda\pi}{2}\right)$

$h_\lambda^{(\pm)} \sim \frac{1}{s} e^{\pm i\left(s - \frac{\lambda\pi}{2}\right)}$  (+) auslaufende & (-) einlaufende Kugelwelle

Vgl. ebene Welle  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  mit  $h_\lambda^+ \sim \frac{(-i)^\lambda}{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r}$

Freies Teilchen: Da, wg. Normierbarkeit von  $\Psi$ ,  $\Psi_c(0) = 0$  gelten muss, kommt als Lsg. nur in Frage:

$$\Psi_E(r, \theta, \phi) = a_{lm}^{(E)} Y_{lm}(\theta, \phi) j_l(kr)$$

hier  $(E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, l, m)$  vollständiges System von Quantenzahlen

Alternativ: ebene Wellen auch vollständiges System:

$$\Psi_E(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} \quad \text{mit Quantenzahlen } (k_x, k_y, k_z) \text{ mit } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

~~Beide~~ Beide Systeme vollständig.

→ Wir können  $e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}}$  zum festen  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  entwickeln nach  $Y_{lm} j_l$  zur selben Energie.

$$e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) j_l(kr)$$

Wähle z-Achse in  $\underline{k}$ -Richtung:  $\underline{k} \cdot \underline{r} = kr \cos \theta$

⇒ rechte Seite enthält kein  $\phi$  ⇒ linke Seite enthält nur  $Y_{l0}$

$$\Rightarrow e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) j_l(kr) = e^{ikr \cos \theta}$$

↑  
Legendre - Polynome

↑  
 $m=0$

Berechnung von  $A_\lambda$ :

$$e^{i k r \cos \theta} = \sum_{\lambda} A_{\lambda} P_{\lambda} J_{\lambda} \quad \left| \cdot P_{\lambda}' \right| \quad \begin{array}{l} \text{Variablen tauschen} \\ \downarrow \\ \cos \theta = x \end{array} \quad \int_{-1}^1 dx$$

$$\int_{-1}^1 dx P_{\lambda}'(x) e^{i k r x} = \sum_{\lambda} A_{\lambda} J_{\lambda} \int_{-1}^1 dx P_{\lambda}(x) P_{\lambda}'(x)$$

$$= \sum_{\lambda} A_{\lambda} J_{\lambda} \frac{2}{2\lambda+1} \delta_{\lambda\lambda'} = \boxed{A_{\lambda} J_{\lambda} \frac{2}{2\lambda+1}}$$

$$\lim_{k r \rightarrow \infty} \int dx P_{\lambda} e^{i k r x} = \boxed{\frac{2 i^{\lambda}}{k r} \sin\left(k r - \frac{\lambda \pi}{2}\right)}$$

↑  
partielle Integration -1  
Terme  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(k r)^2}\right)$  klein

$$\text{Mit } \lim_{k r \rightarrow \infty} J_{\lambda}(k r) = \boxed{\frac{1}{k r} \sin\left(k r - \frac{\lambda \pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow A_{\lambda} = i^{\lambda} (2\lambda+1)$$

# Streuung

Voraussetzung :

$$V(r) r \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty$$

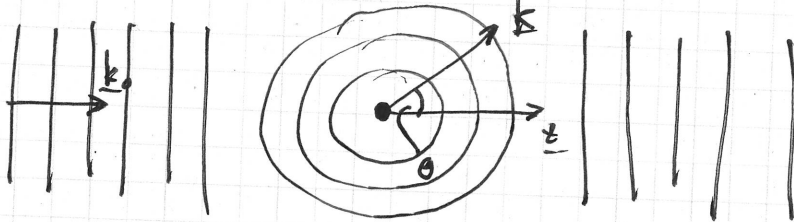
kurzwirkungige Potentiale

kein Coulombpot.

Streu Zustände : Lsg. SG : 
$$\left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \right] \psi = E \psi$$

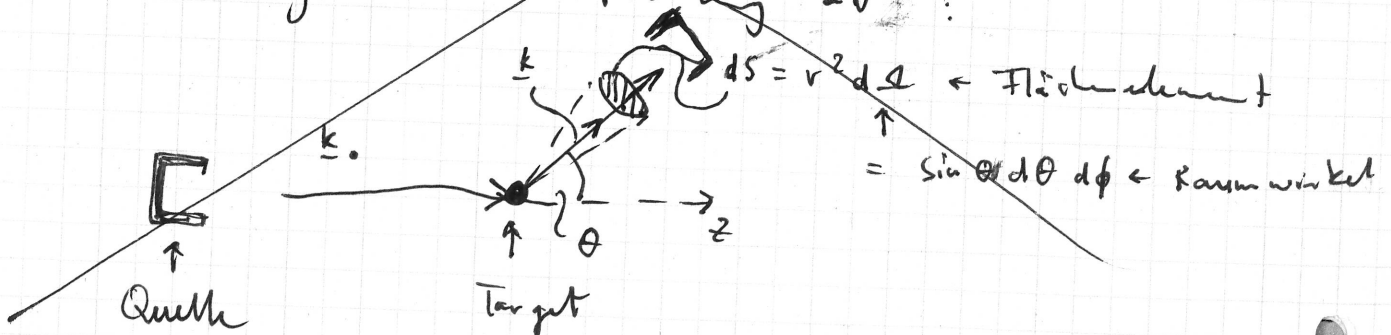
mit  $E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} > 0$  mit asymptotischer Verhalten :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \underbrace{e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}}_{\text{ebene Welle}} + \underbrace{f(\Omega) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r}}_{\text{Kugelwelle}}, \quad \Omega = \theta, \phi$$



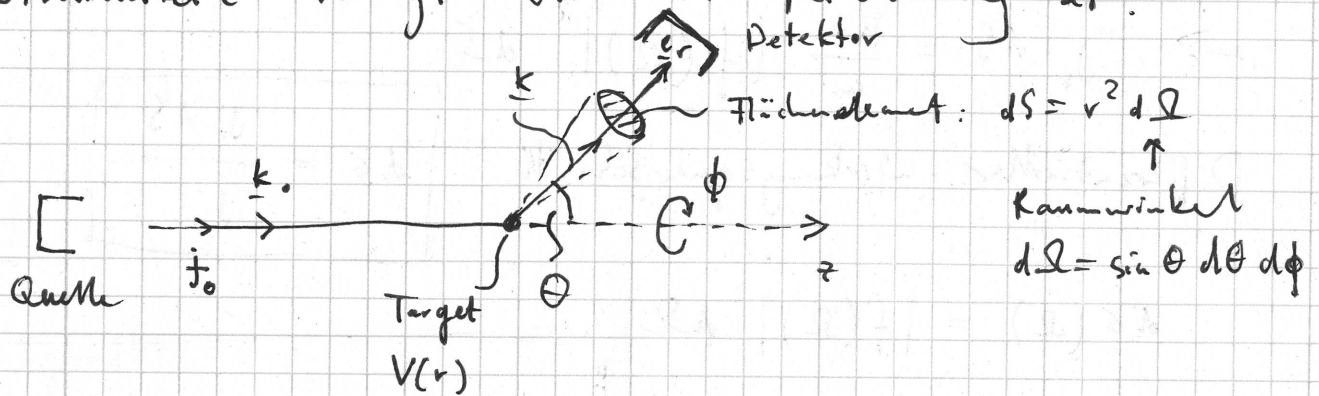
~~Streuung : Teilchen werden auf Streuzentrum geschossen. Nach Wechselwirkung mit Target besteht die Wellenfkt. aus ungestreuter Anteil und Streuwelle in Form von Kugelwellen~~

~~Streuwinkel hängt von der Richtung -b:~~



Streuung: Teilchen werden auf Streuzentrum geschlossen.  
 Nach Wechselwirkung mit Target besteht die Wellenfkt. aus ungestrentem Anteil und Streuwellen in Form von Kugelwellen.

Streuanteil hängt von der Richtung ab:



Messung im Experiment:

• Einfacher Strahl: ermittelte Anzahl d. Teilchen  $\rightarrow j_0$  und deren Geschwindigkeit

• Streustrahl: Zahl d. pro Sekunde detektierten Teilchen im Raumwinkel  $d\Omega$

$$\begin{aligned} \rightarrow j_r \cdot dS &= \text{Radialstrom} \times \text{Fläche} \\ &= \text{Strom} \times \text{Geschwindigkeit} \times \text{Fläche} \\ &= \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right] \end{aligned}$$

Stromdichte: 
$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} \left\{ \psi^* (\nabla \psi) - \psi (\nabla \psi^*) \right\}$$

• Einfache ebene Welle:  $\psi_0 = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$

$$\begin{aligned} \rightarrow j_0 &= |\mathbf{j}_0| = \left| \frac{\hbar}{2im} \left\{ e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \cdot i\mathbf{k}_0 \cdot e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} - e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \cdot (-i\mathbf{k}_0) e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \right\} \right| \\ &= \left| \frac{\hbar \mathbf{k}_0}{m} \right| = \frac{\hbar \mathbf{k}_0}{m} \end{aligned}$$

• Stromstrom:  $\underline{e}_r$  Einheitsvektor in Richtung  $\underline{r}$

$$\begin{aligned} j_r &= (\underline{e}_r \cdot \underline{j}) = \frac{\hbar}{2im} \left\{ \psi_s^* \partial_r \psi_s - \psi_s \partial_r \psi_s^* \right\} \quad \text{mit } \psi_s = f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r} \\ &= \frac{\hbar}{m} |f(\Omega)|^2 \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} \left( \frac{ik e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) - \dots \right\} \\ &= \frac{\hbar k_0}{m} \frac{|f(\Omega)|^2}{r^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_r dS = \frac{\hbar k_0}{m} |f(\Omega)|^2 d\Omega$$

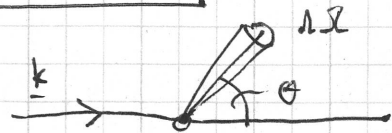
Differentieller Wirkungsquerschnitt: 
$$d\sigma = \frac{j_r dS}{j_0}$$

$$d\sigma(\Omega) = |f(\Omega)|^2 d\Omega$$

Totaler Wirkungsquerschnitt: 
$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\sigma = \int d\Omega |f(\Omega)|^2$$

## Partialwelle für Zentralpotential

Sei:  $V(r)$  Zentralpotential



Problem ist rotationsinvariant um  $\underline{k}$ -Achse, d.h. Streuamplitude hängt nicht von  $\phi$  ab.

Zustandsfkt. für Streuzustand:  $\Psi(r) = \Psi(r, \theta)$

Asymptotisch:  $\lim_{kr \rightarrow \infty} \Psi = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$

Entwicklung von  $\Psi$  in Funktionen  $\square = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  nach

$$\text{Kugelfkt.: } \Psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \frac{y_l}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \cancel{Y_l} \frac{y_l}{r} P_l(\cos \theta)$$

$\Psi$  unabh. von  $\phi$ , nur  $Y_{lm=0} \sim P_l(\cos \theta)$

Ebenso Entwicklung d. Streuamplitude:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos \theta)$$

$y_l$  Lsg. d. radialen SG:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} y_l = 0$$

mit  $U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)$  und  $y_l(0) = 0$



Asymptotik von  $\gamma_\ell$  für  $r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \gamma_\ell(r) &\approx kr A_\ell j_\ell(kr) + kr B_\ell n_\ell(kr) \\ &\approx A_\ell \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) + B_\ell \cos\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) \\ &= a_\ell \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right) \end{aligned}$$

Gültig für  $\lim_{r \rightarrow \infty} rV(r) = 0$

$\delta_\ell$  ist Phasenverschiebung wg.  $U(r)$ ,  $\delta_\ell = 0$  für  $U(r) = 0$

Asymptotik von  $\Psi$  für  $r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_\ell P_\ell \frac{\gamma_\ell}{r} = \sum_\ell P_\ell \frac{1}{r} a_\ell \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right) \\ &= \sum_\ell \frac{P_\ell}{r} \left\{ a_\ell \frac{e^{-i\frac{\ell\pi}{2} + i\delta_\ell}}{2i} e^{ikr} - a_\ell \frac{e^{i\frac{\ell\pi}{2} - i\delta_\ell}}{2i} e^{-ikr} \right\} \quad (*) \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{ikr} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \sum_\ell i^\ell (2\ell+1) P_\ell j_\ell + \sum_\ell f_\ell P_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \\ &= \sum_\ell \frac{P_\ell}{r} \left\{ \left(f_\ell + \frac{2\ell+1}{2ik}\right) e^{ikr} + (-1)^{\ell+1} \frac{2\ell+1}{2ik} e^{-ikr} \right\} \quad (\#) \end{aligned}$$

mit  $j_\ell \approx \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) = \frac{1}{2ikr} \left\{ e^{ikr} e^{-i\frac{\ell\pi}{2}} - e^{-ikr} e^{i\frac{\ell\pi}{2}} \right\}$

Vergleich von (\*) & (#)

$$a_\ell = i^\ell \frac{2\ell+1}{k} e^{i\delta_\ell} \quad \rightarrow \quad \frac{2\ell+1}{2ik} + f_\ell = \frac{2\ell+1}{2ik} e^{2i\delta_\ell}$$

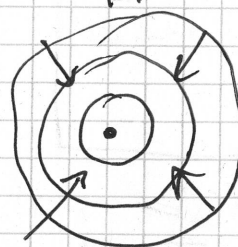
$$f_\ell = \frac{2\ell+1}{2ik} \left( e^{2i\delta_\ell} - 1 \right) = \frac{2\ell+1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell$$

Setze  $f_l$  in (#) ein:

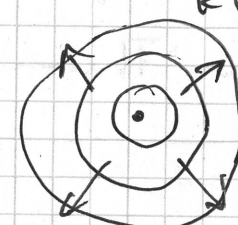
$$\psi = \sum_l \frac{P_l(\cos\theta)}{r} \frac{2l+1}{2ik} \left\{ -i e^{-ikr} + e^{2i\delta_l} e^{ikr} \right\}$$

Setze  $f_l$  in (#) ein:

$$\psi = \sum_l P_l(\cos\theta) \frac{2l+1}{2i} \left\{ -i \frac{e^{-ikr}}{kr} + e^{2i\delta_l} \frac{e^{ikr}}{kr} \right\}$$



einlaufende  
Kugelwelle



auslaufende  
phasenverschobene  
Kugelwelle

=> Wirkung d. Polsteres:

Auslaufende  $l$ -Welle hat eine Phasenverschiebung  $2\delta_l$  gegenüber d. einlaufenden  $l$ -Welle

Streuamplitude:  $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta)$

Streuquerschnitt:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \sum_{l,l'} \frac{(2l+1)(2l'+1)}{k^2} e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin\delta_l \sin\delta_{l'} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)$

Totales - Streuquerschnitt:  $\int d\Omega P_l P_{l'} = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}$

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega |f(\theta)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l = \sum_l \sigma_l$$

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l \leq \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sim \frac{1}{l}$$

Maximal für  $\delta_l = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \dots$  (Resonanzen)!

Ausserdem:  $\operatorname{Im} f_\ell = \frac{2\ell+1}{k} \sin^2 \delta_\ell = \frac{k}{4\pi} \sigma_\ell$

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega |f(\theta)|^2 = \sum_\ell \sigma_\ell = \frac{4\pi}{k} \sum_\ell \operatorname{Im} f_\ell$$

$$= \operatorname{Im} \left( \frac{4\pi}{k} \sum_\ell f_\ell \right) = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\theta=0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\theta=0)} \leftarrow \text{Vorwärtsstrahlung}$$

Optisches Theorem

$\Rightarrow$  Zahl d. gestreuten Teilchen  $\hat{=}$

Abschwächung d. ebenen Welle durch

Interferenzen mit Streuwelle für  $\theta=0$

Wie berechnet man die Streuphasen  $\delta_\ell$ ?

Beg. sein 2 Potentiale:  $U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)$  d.  $\tilde{U} = \frac{2m}{\hbar^2} \tilde{V}$

Radial Gl. zur gleichen Energie  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ :

$$\frac{d^2}{dr^2} Y_\ell + \left( k^2 - U - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) Y_\ell = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \tilde{Y}_\ell + \left( k^2 - \tilde{U} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \tilde{Y}_\ell = 0 \quad (2)$$

$$(1) \cdot \tilde{Y}_\ell - (2) \cdot Y_\ell \Rightarrow$$

$$Y_\ell \frac{d^2}{dr^2} \tilde{Y}_\ell - \tilde{Y}_\ell \frac{d^2}{dr^2} Y_\ell = \frac{d}{dr} \left( Y_\ell \frac{d}{dr} \tilde{Y}_\ell - \tilde{Y}_\ell \frac{d}{dr} Y_\ell \right)$$

$$= - (U - \tilde{U}) Y_\ell \tilde{Y}_\ell$$

Wie berechnet man die Streuphasen  $\delta_l$  ?

Geg. seien 2 Potentiale:  $\tilde{U} = \frac{2m}{\hbar} \tilde{V}$  &  $U = \frac{2m}{\hbar} V$

Radialgl. zur gleichen Energie  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ :  $\left( \frac{d}{dr} X \equiv X' \right)$

$$y_l'' + \left( k^2 - U - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l = 0 \quad (*)$$

$$\tilde{y}_l'' + \left( k^2 - \tilde{U} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \tilde{y}_l = 0 \quad (**)$$

$(*) \cdot \tilde{y}_l - (**) \cdot y_l$  liefert:

$$y_l \tilde{y}_l'' - \tilde{y}_l y_l'' = \frac{d}{dr} (y_l \tilde{y}_l' - \tilde{y}_l y_l')$$

Integration:  $-\int_0^\infty dr (U - \tilde{U}) y_l \tilde{y}_l = \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} (y_l \tilde{y}_l' - \tilde{y}_l y_l')$

$$= \left( y_l \tilde{y}_l' - \tilde{y}_l y_l' \right) \Big|_0^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} (y_l \tilde{y}_l' - \tilde{y}_l y_l')$$

da  $y_l(0) = \tilde{y}_l(0) = 0$

$$= k \left( \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \cdot k \cdot \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \tilde{\delta}_l\right) - \sin\left(\dots + \tilde{\delta}_l\right) \cdot k \cdot \cos\left(\dots + \delta_l\right) \right)$$

$$= k \sin(\delta_l - \tilde{\delta}_l)$$

mit  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$\frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\sin(\delta_l - \tilde{\delta}_l) = - \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr (V - \tilde{V}) y_l \tilde{y}_l$$

Gültig für falls  $\lim_{r \rightarrow \infty} rV(r) \text{ oder } r\tilde{V}(r) = 0$

Speziell gilt für  $\tilde{V} = 0 \Rightarrow \tilde{y}_l = kr j_l(kr)$  und  
 $\tilde{\delta}_l = 0$  da  $j_l(kr) \approx \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2})$

$$\sin \delta_l = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} dr r V(r) j_l(kr) y_l(r)$$

Folgerung: Sei  $U = \tilde{U} + \Delta U$  mit  $\Delta U$  klein & positiv

$$\text{und } y_l = \tilde{y}_l + \Delta y_l \quad \& \quad \delta_l = \tilde{\delta}_l + \Delta \delta_l$$

$$\Rightarrow \sin(\delta_l - \tilde{\delta}_l) = \sin(\Delta \delta_l) \approx \Delta \delta_l$$

$$= -\frac{1}{k} \int_0^{\infty} dr \Delta U y_l' (y_l - \tilde{y}_l)$$

$$\Delta \delta_l \approx -\frac{1}{k} \int_0^{\infty} dr \Delta U y_l'^2 < 0$$

Wenn  $U$  zunimmt, nimmt  $\delta_l$  ab

### Bornsche Näherung

Sei  $|U| < k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}$ , dann  $U$  kleine Störung.

$$\Rightarrow |\delta_l| \ll 1 \quad \text{und} \quad y_l \approx kr j_l(kr)$$

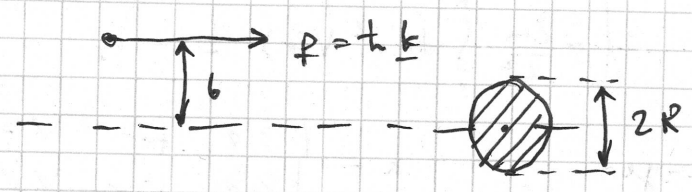
$$\Rightarrow \sin \delta_l \approx \delta_l = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^{\infty} dr r^2 V(r) [j_l(kr)]^2$$

Streuquerschnitt in 1. Näherung in  $V$

Streuung an Potential mit unendlicher Reichweite und Niederenergie - Streuung

Potential mit unendlicher Reichweite:  $V(r) = 0$  für  $r > R$

Klassisch:



~~Stoßparameter~~ b. Stoßparameter  $b$

Drehimpuls:  $L = b \cdot p = b \hbar k$   
 $\approx \hbar \sqrt{l(l+1)} \approx \hbar l$

Nur Schwache Streuung für  $b > R$  bzw.  $l > kR$

Energie  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow$  : kann Streuung für  $l > 0$

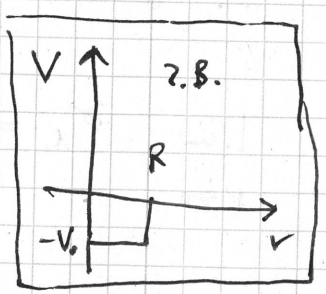
$\Rightarrow$  praktisch nur "S-Streuung" ( $l=0$ )

QM:  $\sin \delta_l = - \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r V(r) j_l(kr) y_l(r)$

Im Potentialbereich  $r \leq R$  für  $k \rightarrow 0$  und  $l > kR$ :

$y_l(r) \approx kr j_l(kr) \approx kr (kr)^l$

$\rightarrow \sin \delta_l = - \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r^2 k (kr)^{2l} V(r)$   
 $\uparrow$   
 (#)  $\approx - \frac{m V_0}{\hbar^2} R^3 k (kR)^{2l} \rightarrow 0$  für  $l > 0$   
 $\uparrow$   
 $\ll 1$



Für  $l \gg kR$  nur "S-Streuung" ( $l=0$ )

Ausserdem folgt aus ( $\neq$ )

$$\sin \delta_l \approx \delta_l \sim \dots k^{2l+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_l}{k} = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq 0 \\ -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^R dr r^2 V(r) = -a & \text{für } l=0 \end{cases}$$

$a \equiv$  Streulänge

$$a = \begin{cases} > 0 & \text{für } V > 0 \\ < 0 & \text{für } V < 0 \end{cases}$$

$a = \pm \infty$  möglich

Erinnerung:  $f_l = \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l \rightarrow \frac{\delta_0}{k}$  für  $l=0$   
und  $\delta_0 \ll 1$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} f_l = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq 0 \\ -a & \text{für } l=0 \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(\theta) = f_0 P_0(\cos \theta) = -a \quad \leftarrow \text{d.h. isotrope "S-Strahlung"}$$
$$= \sum_l f_l P_l(\cos \theta)$$

Erinnerung:  $\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l \rightarrow 4\pi \frac{\delta_l^2}{k^2}$  für  $l=0$   
und  $\delta_l \ll 1$

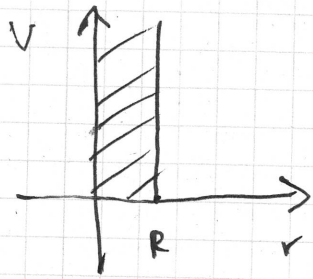
$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_l = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq 0 \\ 4\pi a^2 & \text{für } l=0 \end{cases}$$

D.h.:  $\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_{\text{tot}} = \sum_l \sigma_l = 4\pi a^2$

Entspricht d. Streuung eines klassischen Teilchens an einer Kugel mit Radius  $2|a|$ . ( $|a| \lesssim R$ )

# Harte Kugeln

Demonstration d. Streuphasenmethode am einfachen Modell d. harten Kugeln:



$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > R \\ \infty & \text{für } r \leq R \end{cases}$$

Radialgl.:  $Y_l'' + \left\{ k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} Y_l = 0$

lzw.: 
$$\left\{ \begin{array}{l} Y_l'' + \left\{ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} Y_l = 0 \quad \text{für } r > R \\ Y_l = 0 \quad \text{für } r \leq R \end{array} \right.$$

Randbedingung:  $Y_l(R) = 0$

Für  $r > R$ :  $Y_l = kr \left\{ A j_l(kr) + B n_l(kr) \right\} \quad (*)$

Asymptotik:  $Y_l(r \rightarrow \infty) \approx \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$   
 $= \cos \delta_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + \sin \delta_l \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \quad (\#)$

Vgl. von (\*) & (#):  $A = \cos \delta_l$  &  $B = \sin \delta_l$

da  $j_l \approx \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kr}$

und  $n_l \approx \frac{\cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kr}$

Mit Randbedingung:  $0 = Y_l(R) = \cos \delta_l j_l(kR) + \sin \delta_l n_l(kR)$



$$\Rightarrow \operatorname{tg} \delta_l = \frac{-j_l(kR)}{n_l(kR)} \Rightarrow \sin^2 \delta_l = \frac{j_l^2}{j_l^2 + n_l^2}$$

Also  $\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{j_l^2}{j_l^2 + n_l^2}$

Prakt!

• Hohe Energien:  $\boxed{kR \gg 1}$  ( $j_l \approx \frac{\sin(kR - \frac{l\pi}{2})}{kR}$ ;  $n_l \approx \frac{\cos(\dots)}{kR}$ )

$\Rightarrow$  ~~...~~  $\sigma_l \approx \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2(kR - \frac{l\pi}{2}) \sim \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$

!!!

$\sigma_{\text{tot}} \approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l \approx \frac{4\pi}{k^2} (kR)^2 \frac{1}{2} = 2\pi R^2$

↑

$$\sin^2 \delta_l + \sin^2 \delta_{l+1} = \sin^2 \delta_l + \cos^2 \delta_l = 1$$

$$\text{und } \sum_{l=0}^{l'} (2l+1) = \frac{l'}{2} (2l'+2) \approx l'^2$$

Also:  $\boxed{\sigma_{\text{tot}}(k \rightarrow \infty) = 2\pi R^2}$

klassisch erwartet:  
 $\sigma_{\text{tot}} = \pi R^2$

• kleine Energien:  $kR \ll 1$  ( $j_l \approx \frac{(kR)^l}{(2l+1)!!}$ ;  $n_l \approx (2l-1)!! (kR)^{-l-1}$ )

$$\rightarrow \sigma_l \approx \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{(kR)^{4l+2}}{((2l+1)!! (2l-1)!!)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l} = \frac{(kR)^4}{(2l+3)(2l+1)^2} \ll 1$$

$\Rightarrow$   $l=0$  - Term dominant ("s-Strang")

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_0 = 4\pi R^2 \left( \frac{\sin(kR)}{kR} \right)^2} \leftarrow \text{exakt wg. } j_0 = \frac{\sin kR}{kR} \quad \text{und } u_0 = \frac{\cos kR}{kR}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{aligned} \sigma_{t,f}(k \rightarrow 0) &= \sigma_0(k \rightarrow 0) = 4\pi R^2 \\ \Rightarrow R &= a \\ &\uparrow \text{Strahlänge} \end{aligned} \right]$$

Diskussion:

• klassisch:  $\sigma_{kl.} = \pi R^2$  (unabh. von d. Energie)

• QM: • kleine Energien:  $\sigma_{t,f}(k \rightarrow 0) = 4\sigma_{kl.}$

• hohe Energien:  $\sigma_{t,f}(k \rightarrow \infty) = 2\sigma_{kl.}$

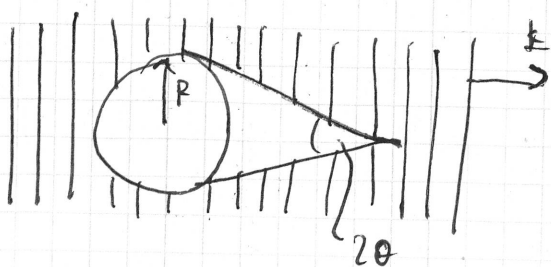
Man kann zeigen (Sakurai):

$$\sigma_{t,f}(k \rightarrow \infty) = \sigma_{\text{Reflexion}} + \sigma_{\text{Schatten}} = \sigma_{kl.} + \sigma_{kl.}$$

Ursache für  $\sigma_{\text{Reflexion}}$  ist isotrope Streuung.

Ursache für  $\sigma_{\text{Schatten}}$  ist Beugung d. einfallenden Welle um d. Kante d. Kugel (in Vorwärtsrichtung zentriert) ~~verantwortlich für Schattenbereich hinter d. Kugel~~

• Schatten entsteht durch destruktive Interferenz d. einfallenden u. gestreuten Welle.  $\sim$  Unschärfe  $\perp$  zu  $k$

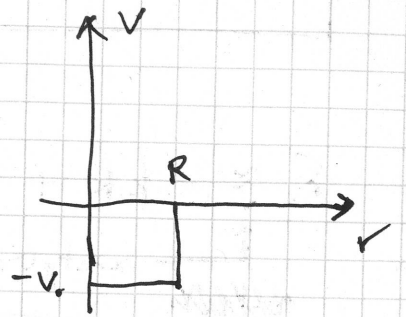


$$\Rightarrow \left[ \begin{aligned} P_{\perp} \cdot R &\approx \hbar \\ P &= \hbar k \\ \theta &\approx \frac{1}{Rk} \end{aligned} \right], \quad P_{\perp} \approx p \cdot \theta$$

# s-Strahlung am Potentialtopf

$$\text{Sei } V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > R \\ -V_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$V_0 = \frac{\hbar^2 K_0^2}{2m}$$



$$\text{R.-Wdg. für } l=0: \begin{cases} \left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) y_0 = 0 & \text{für } r > R \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \tilde{K}^2 \right) y_0 = 0 & \text{für } r < R \end{cases}$$

$$\tilde{K}^2 = k^2 + K_0^2$$

$$\text{Sei } k^2 \ll \tilde{K}^2$$

$$\text{Lsg.: } y_0 = \begin{cases} \sin(kr + \delta_0) & \text{für } r > R \\ A \sin(\tilde{K}r) & \text{für } r < R \end{cases}$$

Aus Stetigkeit von  $y_0$  und  $y_0'$  bei  $R$  folgt:

$$\sin(kR + \delta_0) = A \sin(\tilde{K}R)$$

$$k \cos(kR + \delta_0) = \tilde{K} A \cos(\tilde{K}R)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(kR + \delta_0) = \frac{k}{\tilde{K}} \tan(\tilde{K}R) \quad \text{oder} \quad \delta_0 = -kR + \arctan\left(\frac{k}{\tilde{K}} \tan(\tilde{K}R)\right)}$$

Wir betrachten tiefe Töpfe  $\frac{k}{\tilde{K}} \ll 1$  und  $kR \ll 1$

↑  
Strahlung bei niedriger  
Energie

•  $\boxed{\tilde{k}R \neq (n + \frac{1}{2})\pi}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (keine Divergenz von  $\text{tg}(\tilde{k}R)$ )

$\delta_0 \approx -kR + \frac{k}{\tilde{k}} \text{tg}(\tilde{k}R) = -kR \left( 1 - \frac{\text{tg}(\tilde{k}R)}{\tilde{k}R} \right)$   
 $\uparrow$   $\text{arctg}(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \dots$

$\sigma_{t,t} \approx \sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx 4\pi R^2 \left( 1 - \frac{\text{tg}(\tilde{k}R)}{\tilde{k}R} \right)^2$

Für  $\text{tg}(\tilde{k}R) = \tilde{k}R$  ist  $\boxed{\sigma_{t,t} \approx 0}$  !!!

Ramsauer - Effekt : Potential (Atom, Kern) wird für bestimmte Energien "durchsichtig", d.h. verursacht keine Streuung.

~~Sei  $\tilde{k}R = (n + \frac{1}{2})\pi$  Resonanzen~~  
~~Sei  $k_r R = (n + \frac{1}{2})\pi$  und  $\tilde{k} \approx k_r$~~   
~~Definition d. Resonanzenergie  $E_r = \frac{\hbar^2 k_r^2}{2m}$~~   
~~Entwicklung um  $\tilde{k} = k_r$~~   
 ~~$\frac{\tilde{k}}{k} \text{ctg}(\tilde{k}R) = \frac{\tilde{k}}{k} \text{ctg} \left( k_r R - (k_r - \tilde{k})R \right)$~~

• Resonanzen

$$\boxed{\tilde{k}_r R = (n + \frac{1}{2}) \pi} \quad n = 1, 2, \dots$$

Sei  $\tilde{k} \approx \tilde{k}_r$  mit  $\tilde{k}^2 = k^2 + k_0^2$

sei  $\boxed{E_r = \frac{\hbar^2 k_r^2}{2m}}$  die dazugehörige Energie (Resonanzenergie) der einfallenden Welle.

Entwicklung um  $\tilde{k} = \tilde{k}_r$ :

$$\frac{\tilde{k}}{k} \operatorname{ctg}(\tilde{k}R) = \frac{\tilde{k}_r}{k} \operatorname{ctg}\left(\underbrace{\tilde{k}_r R}_{=\frac{\pi}{2}} - (\tilde{k}_r - \tilde{k})R\right)$$

$$\approx \frac{\tilde{k}_r}{k} \operatorname{tg}((\tilde{k}_r - \tilde{k})R)$$

$$\approx \frac{\tilde{k}_r}{k} (\tilde{k}_r - \tilde{k})R \approx \frac{\tilde{k}_r^2 - \tilde{k}^2}{2\tilde{k}_r/R} = \frac{k_r^2 - k^2}{2k_r/R}$$

$$= \frac{E_r - E}{\Gamma/2}$$

mit

$$\boxed{\Gamma = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{4k_r}{R}}$$

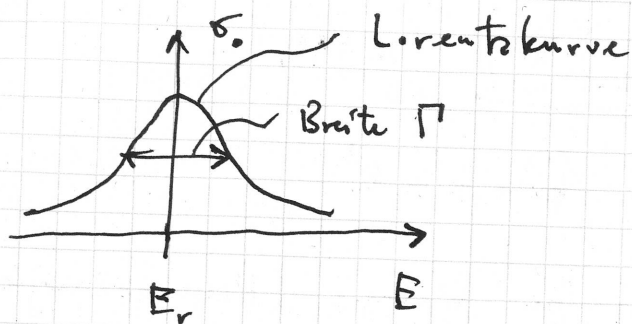
Mit  $kR \ll 1$  folgt:

$$\boxed{\delta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\Gamma/2}{E_r - E}\right) \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\Gamma/2}{E_r - E}}$$

$$\text{Es folgt: } f_0 = \frac{1}{k_r} \frac{e^{i\delta_0} \sin(\delta_0)}{\operatorname{tg}(\delta_0)} = -\frac{1}{k_r} \frac{\Gamma/2}{E - E_r + i\frac{\Gamma}{2}}$$

$$\frac{1}{1 - i\operatorname{tg}(\delta_0)}$$

$$\boxed{\sigma_{\text{tot}} \approx \sigma_0 = \frac{4\pi}{k_r^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{k_r^2} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_r)^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$$



In d. Nähe d. Resonanzen  
wächst  $\delta$  plötzlich an,  
insbesondere, wenn  $\Gamma$  klein.

Stromphase  $\delta_0$  geht durch  $\frac{\pi}{2}$ .

Analyse kann man  $l \neq 0$  studieren.

Wenn bei  $E_r$  Resonanz d.  $l$ -Welle auftritt gilt

$$\delta_l = \arctg\left(\frac{\Gamma/2}{E_r - E}\right)$$

Betrachte Radialfkt.  $y_0$  im Resonanzfall:

$$r < R : y_0 = A \sin(\tilde{k}r)$$

$$A = \frac{\sin(kR + \delta_0)}{\sin(\tilde{k}R)} \approx \frac{\sin \delta_0}{\sin(\tilde{k}_r R)} = \sin \delta_0$$

$$\uparrow$$

$$kR \ll 1 \text{ und } \tilde{k}_r R = \frac{\pi}{2}$$

"Aufenthaltswahrscheinlichkeit" im Topf ist proportional

$$\text{zu } y_0^2 \sim A^2 \sim \sin^2 \delta_0 \sim \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Bei Resonanz wächst diese stark an.

Bei Betrachtung eines nichtstehenden Wellenpakets,  
würden wir finden, daß das Teilchen bei Resonanz  
lange im Potentialtopf verweilt. Man spricht von

quasistationärer Zustand = virtuelles ~~Reelles~~ Niveau im  
Kontinuum = Resonanz

Für stationäre Zustände gilt:

$$\Psi(t) \sim e^{-iEt/\hbar}$$

Für quasistationäre Zustände gilt:  $\left( E = E_r - \frac{i}{2}\Gamma \right)$

$$\tilde{\Psi}(t) \sim e^{-iE_r t/\hbar} e^{-\Gamma t/2\hbar}$$

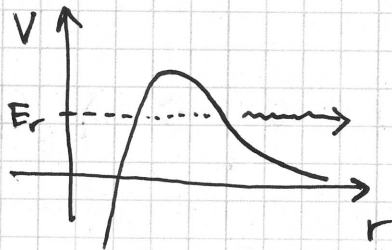
Pol von  $f_0$

Wahrscheinlichkeit  $|\tilde{\Psi}|^2 \sim e^{-\Gamma t/\hbar} = e^{-t/\tau}$

$\tau$ : Lebensdauer d. quasistationären Zustands  
mit Energie  $E_r$

Solche Zustände können z.B. auftreten im

Potential:



Zerfall durch  
tunneln

# Streuung mittels Green'scher Fkt.

Bisher asymptotische Beschreibung d. Streuzustände.

Um sukzessive Näherungen zu entwickeln ist ein anderer Ansatz nötig.

Zuerst: Umformung d. SG in eine Integralgl.

$$\text{SG: } \frac{\hbar^2}{2m} (\Delta + k^2) \Psi_k(\underline{r}) = V(\underline{r}) \Psi_k(\underline{r})$$

für  
Streuzustand und  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$

Lsg. für ~~Wasser~~  $V=0$  sind ebene Wellen:

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta + k^2) \Psi_k(\underline{r}) = 0 \Rightarrow \Psi_k(\underline{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\underline{r}}}{(2\pi)^{3/2}}$$

Def.:  $G_k(\underline{r}, \underline{r}')$  heißt Green'sche Fkt.:

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta + k^2) G_k(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}') \quad (\#)$$

$G_k(\underline{r}, \underline{r}')$  beschreibt eine Welle, die von einer Punktquelle bei  $\underline{r}'$  ausgeht.

$G_k(\underline{r}, \underline{r}')$  wird freier Propagator genannt.

Behauptung:  $\Psi_k(\underline{r}) = \Psi_k^{(0)}(\underline{r}) + \int d\underline{r}' G_k(\underline{r}, \underline{r}') V(\underline{r}') \Psi_k^{(0)}(\underline{r}')$

Beweis:  $\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta + k^2) \Psi_k(\underline{r}) = 0 + \int d\underline{r}' \delta(\underline{r} - \underline{r}') V(\underline{r}') \Psi_k^{(0)}(\underline{r}') = V(\underline{r}) \Psi_k^{(0)}(\underline{r})$

gut machen



Konstruktion: Wg. Translationsinvarianz ist

$$G_k(\underline{r}, \underline{r}') = G_k(\underline{r} - \underline{r}')$$

Fourier Transform:  $G_k(\underline{r} - \underline{r}') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{G}(q) e^{iq(\underline{r} - \underline{r}')}$

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} 1 e^{iq(\underline{r} - \underline{r}')}$$

Einsetzen in (#) liefert:

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (-q^2 + k^2) \tilde{G}(q) - 1 \right] e^{iq(\underline{r} - \underline{r}')} = 0$$

$\Rightarrow$

$\uparrow$

Rücktrafo.

$$\tilde{G}(q) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{k^2 - q^2}$$

Vorsicht: Singularität bei  $k^2 = q^2$  (Pol bei  $q = \pm k$ )

Sei  ~~$k \in \mathbb{R}$~~   $k \in \mathbb{C}$ , dann  $\tilde{G}(q)$  wohl definiert.

Wir betrachten  $k$  in d. Nähe d. reellen Achse, d.h.

$k \pm i\delta$  mit  $\delta$  infinitesimal,  $\delta = 0^+$

Also:  $\tilde{G}^{(\pm)}(q) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(k \pm i\delta)^2 - q^2}$

# Fourier Trafo.:

$$\begin{aligned}
 G_k^{(+)}(r) &= \int \frac{df}{(2\pi)^3} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(k+i\delta)^2 - q^2} e^{iqr} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq q^2 \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\pi -d(\cos\theta) \frac{e^{iqr \cos\theta}}{(k+i\delta)^2 - q^2} \quad \begin{array}{l} \text{Integration über} \\ \cos\theta \\ \downarrow \\ = \end{array} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 i r} \int_0^\infty dq q \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{(k+i\delta)^2 - q^2} \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{2m}{\hbar^2} \frac{q e^{iqr}}{(q-k-i\delta)(q+k+i\delta)} \quad \begin{array}{l} \text{im 2. Integral } q \rightarrow -q \end{array} \\
 &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{2m}{\hbar^2} \text{Res}_{q=k+i\delta} \frac{q e^{iqr}}{(q-k-i\delta)(q+k+i\delta)} \\
 &= -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}
 \end{aligned}$$

Alternativ: radial symmetrisch  $G(\underline{r}) = G(r)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r G(r)) + k^2 G(r) = \delta(\underline{r})$$

•  $r \neq 0 \Rightarrow \delta(\underline{r}) = 0$  da einlaufende Welle

$$G(r) = \frac{1}{r} (A e^{ikr} + B e^{-ikr})$$

•  $r = 0$ :

$$\Delta G(\underline{r}) \approx \delta(\underline{r}) \Rightarrow G(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi r}$$

Green'sche Fkt. der Poisson-Gl.

$$\Rightarrow G(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$$

Also :

$$G^{(+)}(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$\Psi^{(+)}$  : auslaufende Welle

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\underline{r}) = \varphi_{\mathbf{k}}(\underline{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' \frac{e^{i\mathbf{k}|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} V(\underline{r}') \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\underline{r}')$$

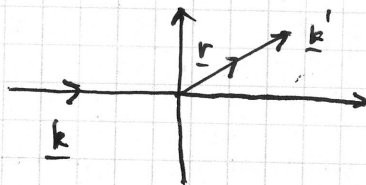
Integralgl. für Streuzustand  $\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\underline{r})$

Sei ~~...~~  $\lim_{r \rightarrow 0} V(r)r = 0$ , dann  $\lim_{r \rightarrow \infty}$  und  $\int d\underline{r}' \dots$  vertauschbar.

Asymptotik  $r \rightarrow \infty$  :  $r \gg r'$

$$|\underline{r}-\underline{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\underline{r}\cdot\underline{r}'} = r - \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)$$

$$\mathbf{k} \frac{\underline{r}}{r} \cdot \underline{r}' =: \mathbf{k}' \cdot \underline{r}'$$



$$\Rightarrow \frac{e^{i\mathbf{k}|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \cdot e^{-i\mathbf{k}'\cdot\underline{r}'}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\underline{r}) &\approx \varphi_{\mathbf{k}}(\underline{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \int d\underline{r}' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\underline{r}'} V(\underline{r}') \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\underline{r}') \\ &= e^{i\mathbf{k}\cdot\underline{r}} + \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \cdot f(\underline{k}, \underline{k}') \end{aligned}$$

$$\text{Altbekannte Streuamplitude : } f(\underline{k}, \underline{k}') = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \varphi_{\mathbf{k}'} | V | \varphi_{\mathbf{k}} \rangle^{(+)}$$

# Diagrammatische Darstellung d. Integralgl.

$$\Psi_k^{(+)}(r) = \Psi_k(r) + \int dr' G_k^{(+)}(r, r') V(r') \Psi_k^{(+)}(r') \quad (\#)$$

$$\Psi_k^{(+)}(r) \rightarrow \text{stick figure with two legs} ; \Psi_k(r) \rightarrow \text{stick figure with one leg} ; G_k(r, r') \rightarrow \text{stick figure with two legs and a dot at the top}$$

$$(\#): \text{stick figure with two legs} = \text{stick figure with one leg} + \text{stick figure with two legs and a dot at the top}$$

Es wird über innere Punkte integriert.

Am inneren Punkt sitzt  $V(r')$ .

0-te Näherung:  $\text{stick figure with two legs} = \text{stick figure with one leg}$

1-te Näherung:  $\text{stick figure with two legs} = \text{stick figure with one leg} + \text{stick figure with two legs and a dot at the top}$  Born'sche Näherung

$$\Psi_k^{(+)} = \Psi_k + \int dr' G_k(r, r') V(r') \Psi_k(r')$$

2-te Näherung:  $\text{stick figure with two legs} = \text{stick figure with one leg} + \text{stick figure with two legs and a dot at the top} + \text{stick figure with two legs and two dots at the top}$

$$\Psi_k^{(+)} = \Psi_k + \int dr' G_k(r, r') V(r') \Psi_k(r') + \int dr' dr'' G_k(r, r') V(r') G_k(r', r'') \cdot V(r'') \Psi_k(r'')$$

~~$$\Psi = \sum [GV]^n \Psi$$~~

~~$$|\Psi_k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [GV]^n |\Psi_k\rangle$$
 Born'sche Reihe~~

$$|\Psi_k^{(+)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [GV]^n |\Psi_k\rangle$$
 Born'sche Reihe

Bornsche Näherung für Streuamplitude:

$$\begin{aligned} f(k, k') &= -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \varphi_{k'} | V | \varphi_k^{(+)} \rangle \\ &= -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_{k'} | V [GV]^n | \varphi_k \rangle \\ &= \dots \left[ \langle \varphi_{k'} | V | \varphi_k \rangle + \langle \varphi_{k'} | V G V | \varphi_k \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \varphi_{k'} | V G V G V | \varphi_k \rangle + \dots \right] \end{aligned}$$

$$f_B(k, k') = -\frac{4\pi m}{\hbar^2} \langle \varphi_{k'} | V | \varphi_k \rangle$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r} e^{-i\underline{k}'\underline{r}} V(\underline{r}) e^{i\underline{k}\underline{r}}$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\underline{k}' - \underline{k})$$

↑  
Fouriertrafo d. Potentials  $V(\underline{r})$

Bornsche Näherung gültig für:  $E \gg V$ ,

nur geringe Beeinflussung d. ebenen Wellen durch

Streuungspotential.

Beispiel: Elastische Streuung von  $e^-$  am Atom

- Kern mit  $Z$  Protonen am Ort  $r=0$  (lokalisiert)
- Elektronenverteilung  $g(r)$  um  $r=0$ :  $\int d\underline{r} g(r) = Z$  (Wolke)

Poisson-Gl. für elektrostatisches Potential:

$$\Delta \phi(r) = -4\pi e \rho_{\text{tot}}(r) = -4\pi e \left( \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kern}}}{Z \delta(r)} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Elektronen}}}{g(r)} \right)$$
$$V(r) = -e \phi(r)$$

Fourier Tr.-fo.:

$$\phi(r) = \int \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(\underline{q}) e^{i\underline{q} \cdot \underline{r}}, \quad \tilde{\phi}(\underline{q}) = \int d\underline{r} \phi(r) e^{-i\underline{q} \cdot \underline{r}}$$

$$\cancel{g} g(r) \leftrightarrow \tilde{g}(\underline{q}) := \underbrace{F(\underline{q})}_{\text{Formfaktor}} = \int d\underline{r} g(r) e^{-i\underline{q} \cdot \underline{r}} \approx Z + \mathcal{O}(q^2) \quad \text{für } q \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow -q^2 \tilde{\phi}(\underline{q}) = -4\pi e (Z - F(\underline{q}))$$

$$\Rightarrow \tilde{V}(\underline{q}) = -\frac{4\pi e^2}{q^2} (Z - F(\underline{q}))$$

Bornsche Näherung:

$$f_B(\underline{q}) = \frac{2m e^2}{\hbar^2} \frac{Z - F(\underline{q})}{q^2} \quad \text{mit } \underline{q} = \underline{k}' - \underline{k}$$

$$\left[ \text{Für Zentralpotential } V(r): \tilde{V}(\underline{k}' - \underline{k}) = \tilde{V}(|\underline{k}' - \underline{k}|) \right]$$

$$q^2 = |\underline{k}' - \underline{k}|^2 = \underline{k}'^2 + \underline{k}^2 - 2 \underline{k} \cdot \underline{k}' = 2k^2 - 2k^2 \cos \theta = 4k^2 \sin^2 \theta / 2$$

$\uparrow$   $|\underline{k}| = |\underline{k}'|$

$$f_B(k, \theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(2k \sin \theta/2)$$

← Bornsche Näherung  
für Zentralpotential

###

Differenzieller Streuquerschnitt in Bornscher Näherung:

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = |f_B(k, \theta)|^2 = \frac{4m^2 e^4}{\hbar^2} \frac{z^2}{4^2 k^4 \sin^4 \theta/2}$$

↑  
F=0

Rutherford'sche Streifenformel:

Grosse Divergenz bei  $\theta \rightarrow 0$

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} \sim \frac{1}{\theta^4}$$

resultiert aus Abklingverhalten

durch weiter vorne Teilchen mit kleinem Winkel im langreichweitigen  $\frac{1}{r}$ -Potential.

Grosse Divergenz für  $\Theta \rightarrow 0$ :  $\frac{d\sigma_s}{d\Omega} \sim \frac{1}{\Theta^4}$

resultiert aus Langwertschwanzigkeit des  $\frac{1}{r}$ -Potentials.

Durch Vernachlässigung von  $F$  war Atom elektrisch nicht neutral.

Für neutrale Gebilde gilt:

$$Z - F(q) \sim q^2 \quad \text{für } q^2 \rightarrow 0 \quad \text{also für } \Theta \rightarrow 0$$

$\rightarrow$  keine Divergenz