10. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 19.06.2019 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*12 Punkte*] **Dirac-Gleichung - Teil II**

Fortsetzung von Blatt 9, Aufgabe 5 mit identischen Definitionen.

$\boxed{4}$ (a) Bestimmen Sie mithilfe des Ansatzes

$$\psi\left(t,\boldsymbol{x}\right)=\psi e^{\frac{-\imath}{\hbar}\left(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)}\quad\text{mit}\quad\psi=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

die Lösung der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen. ξ und η sind dabei jeweils zweikomponentige Vektoren.

$\boxed{4}$ (b) Zeigen Sie, dass für den Drehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ und den Spinoperator $\hat{\boldsymbol{S}}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0\\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}}\end{pmatrix}$ folgende Kommutatorrelationen gelten:

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}},\hat{H}_{\text{Dirac}}\right]=\imath\hbar c\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\times\hat{\boldsymbol{p}}\right)\quad,\quad\left[\hat{\boldsymbol{S}},\hat{H}_{\text{Dirac}}\right]=-\imath\hbar c\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\times\hat{\boldsymbol{p}}\right)\quad.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\boxed{2}$ (c) Zeigen Sie, dass aus der zeitunbhängigen Dirac-Gleichung für ein Teilchen mit Ladung e im elektromagnetischen Feld

$$\left[c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}+mc^2\hat{\beta}+e\hat{\phi}\right]\psi=E\psi\quad\text{mit}\quad\psi=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

mit dem kanonischen Impuls $\hat{\boldsymbol{\pi}}=\hat{\boldsymbol{p}}-\frac{e}{c}\hat{\boldsymbol{A}}$ im nichtrelativistischen Grenzfall die Pauli-Gleichung für die Komponente ξ folgt:

$$\left[\frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{2m}-\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}+e\hat{\phi}\right]\xi=\left(E-mc^2\right)\xi\quad.$$

Interpretieren Sie den Term $-\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}$ in Hinblick auf den Zusammenhang zwischen Spin und magnetischem Moment des Dirac-Teilchens.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\right)^2=\hat{\boldsymbol{\pi}}^2+\sum_{i<j}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\left[\hat{\pi}_i,\hat{\pi}_j\right]\quad.$$

$\boxed{2}$ (d) Die Spinoren

$$\psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},s}(\boldsymbol{x},t)=\sqrt{\frac{m}{E_pV}}\,u_s(\boldsymbol{p})e^{-\imath p_\mu x^\mu}=\sqrt{\frac{m}{E_pV}}\,u_s(\boldsymbol{p})e^{-\imath(E_pt-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})},$$
$$\psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},s}(\boldsymbol{x},t)=\sqrt{\frac{m}{E_pV}}\,v_s(-\boldsymbol{p})e^{+\imath p_\mu x^\mu}=\sqrt{\frac{m}{E_pV}}\,v_s(-\boldsymbol{p})e^{\imath(E_pt+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$$

stellen eine Lösung der freien Dirac-Gleichung dar. Dabei gilt in natürlichen Einheiten $x^\mu=(t,\boldsymbol{x})$, $p_\mu=(E_p,-\boldsymbol{p})$, $E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ und $s\in\{\uparrow,\downarrow\}$. Damit beschreibt $\psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t)$ ein Teilchen mit positiver Energie $E=+E_p$, Impuls $\boldsymbol{p}$ und Spin $s=\uparrow$ und $\psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t)$ ein Teilchen mit negativer Energie $E=-E_p$, Impuls $\boldsymbol{p}$ and Spin $s=\uparrow$.

Mit der **Slash-Notation** $\not{p}=\gamma^\mu p_\mu$ gilt:

$$u_s(\boldsymbol{p})=\frac{\not{p}+m}{\sqrt{2m(m+E_p)}}\,u_s(m,\boldsymbol{0}),\qquad v_s(\boldsymbol{p})=\frac{-\not{p}+m}{\sqrt{2m(m+E_p)}}\,v_s(m,\boldsymbol{0}),$$

wobei

$$u_\uparrow(m,\boldsymbol{0})=\begin{pmatrix}\chi_1\\ 0\end{pmatrix},\quad u_\downarrow(m,\boldsymbol{0})=\begin{pmatrix}\chi_2\\ 0\end{pmatrix},\quad v_\uparrow(m,\boldsymbol{0})=\begin{pmatrix}0\\ \chi_1\end{pmatrix},\quad v_\downarrow(m,\boldsymbol{0})=\begin{pmatrix}0\\ \chi_2\end{pmatrix}.$$

χ_s sind die zweikomponentigen Einheitsvektoren, wie in der Vorlesung definiert.

Zeigen Sie, dass die hier angegebenen Spinoren zu den in der Vorlesung angegebenen Spinoren äquivalent sind und vergleichen Sie beide Normierungen.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27
thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

2. [*8 Punkte*] **Orthogonalitätsrelationen der Vierer-Spinoren**

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

$\boxed{3}$ (b) Beweisen Sie die Orthogonalitätsrelationen

$$\bar{u}_r(\boldsymbol{p})\, u_s(\boldsymbol{p}) = \delta_{rs}\,, \quad \bar{u}_r(\boldsymbol{p})\, v_s(\boldsymbol{p}) = 0\,, \quad \bar{v}_r(\boldsymbol{p})\, v_s(\boldsymbol{p}) = -\delta_{rs}\,, \quad \bar{v}_r(\boldsymbol{p})\, u_s(\boldsymbol{p}) = 0\,,$$

wobei $\bar{u}_r(\boldsymbol{p}) = u_r^\dagger(\boldsymbol{p})\gamma^0$. Verwenden Sie dazu die Definitionen aus Aufgabenteil 1 (d).

$\boxed{3}$ (c) Zeigen Sie, dass für die Spinoren $\bar{\psi}\psi$ ein Skalar ist und dass die Dichte $\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi$ hingegen keine Lorentz-Invariante darstellt.

3. [*10 Punkte*] **Lorentz-Transformation von Spinoren**

$\boxed{5}$ (a) Zeigen Sie, dass die Lösungen der freien Dirac-Gleichung aus Aufgabenteil 1 (d) wie folgt gegeben sind:

$$\psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_pV}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_p+m} \\ \frac{p_x+\imath p_y}{E_p+m}\end{pmatrix} e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_pt)}, \quad \psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},\downarrow}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_pV}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-\imath p_y}{E_p+m} \\ -\frac{p_z}{E_p+m}\end{pmatrix} e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_pt)},$$

$$\psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_pV}}\begin{pmatrix} -\frac{p_z}{E_p+m} \\ -\frac{p_x+\imath p_y}{E_p+m} \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+E_pt)}, \quad \psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},\downarrow}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_pV}}\begin{pmatrix} -\frac{p_x-\imath p_y}{E_p+m} \\ \frac{p_z}{E_p+m} \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+E_pt)}.$$

$\boxed{5}$ (b) Transformieren Sie den Spinor eines freien Elektrons mit $\boldsymbol{p} = p\,\boldsymbol{e}_x$ in ein mit Geschwindigkeit $v = \beta = p/E_p$ in x-Richtung bewegtes Bezugssystem. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Elektron in Ruhe und überprüfen Sie, ob die Norm erhalten ist.
Hinweis: Nach Vorlesung transformieren sich die Vierer-Spinoren wie

$$\psi' = S\psi \qquad \text{mit} \qquad S = \mathbb{1}\cosh\frac{\eta}{2} - \alpha_x \sinh\frac{\eta}{2}, \qquad \tanh\eta = \beta, \qquad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0\end{pmatrix}$$

unter Lorentz-Transformation in x-Richtung.

4. [*10 Punkte*] **Ladungskonjugation**
Sei ψ eine Lösung der Dirac-Gleichung

$$\imath\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A}) + e\phi + m\hat{\beta}\right]\psi$$

mit skalarem Potential ϕ und Vektorpotential $\boldsymbol{A}$.

$\boxed{5}$ (a) Zeigen Sie, dass der ladungskonjugierte Zustand $\psi^C = C\psi^\star$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \imath\sigma_y \\ -\imath\sigma_y & 0\end{pmatrix}$$

die Dirac-Gleichung mit entgegengesetzter Ladung erfüllt:

$$\imath\frac{\partial\psi^C}{\partial t} = \left[\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) - e\phi + m\hat{\beta}\right]\psi^C.$$

$\boxed{5}$ (b) Die Wellenfunktion $\psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},s}(\boldsymbol{x},t)$ beschreibt ein Teilchen mit positiver Energie, Impuls $\boldsymbol{p}$ und Spin s, während $\psi^{(-)}_{\boldsymbol{p},-s}(\boldsymbol{x},t)$ einem Teilchen mit negativer Energie, Impuls $-\boldsymbol{p}$ und Spin $-s$ entspricht. Ziel der Ladungskonjugation ist es eine Beziehung zwischen dem Zustand mit negativer Energie und dem des Antiteilchens herzustellen. Zeigen Sie mit Hilfe der Darstellung aus Aufgabe 2 (a), dass gilt:

$$\left[\psi^{(-)}_{\boldsymbol{p},\downarrow}(\boldsymbol{x},t)\right]^C = \psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t).$$

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 — thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 — johannes@lusi.uni-sb.de