12. Übung

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 03.07.2019 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*12 Punkte*] **Eigenschaften des reellen Klein-Gordon-Feldes**

Das reelle Klein-Gordon-Feld beschreibt ungeladene Teilchen, die Feldoperatoren können daher als

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left[\hat{b}_{\boldsymbol{k}} e^{\imath(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)} + \hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}} e^{-\imath(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right] \quad , \quad \omega_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$$

geschrieben werden, wobei $\hat{b}_{\boldsymbol{k}}$ und $\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ bosonischen Vertauschungsrelationen gehorchen.

$\boxed{6}$ (a) Leiten Sie mit Hilfe des Residuensatzes den Kommutator des Feldoperators $\hat{\phi}$

$$\left[\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t), \hat{\phi}(\boldsymbol{r}',t')\right] = \begin{cases} = 0 & \text{für } |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| > |t-t'| \\ \neq 0 & \text{für } |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \leq |t-t'| \end{cases} \tag{1}$$

an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten her. Also sind $\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{\phi}(\boldsymbol{r}',t')$ für $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| > |t-t'|$ unabhängig - sie können sich nicht gegenseitig beeinflussen. Da Signale sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können (n.b. hier c=1) ist damit ist Mikro-Kausalität gewährleistet.

$\boxed{2}$ (b) Zeigen Sie, dass $\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{\phi}(\boldsymbol{r}',t')$ nicht unabhängig sind, wenn $\hat{b}_{\boldsymbol{k}}$ und $\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ Antikommutatorelationen genügen.

$\boxed{2}$ (c) Zeigen Sie, dass der Vakuumserwartungswert des Feldoperators $\langle 0|\,\hat{\phi}\,|0\rangle = 0$ verschwindet, während $\langle 0|\,\hat{\phi}^2\,|0\rangle$ divergiert.

$\boxed{2}$ (d) Weisen Sie nach, dass durch Einführung von Normalordnung, der Beitrag der divergenten Nullpunktsenergie eliminiert werden kann. Der Normalordnungsoperator :: ist definiert durch $:\hat{b}_{\boldsymbol{k}}\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}: := \hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{b}_{\boldsymbol{k}}$ beziehungsweise $:\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{b}_{\boldsymbol{k}}: := \hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{b}_{\boldsymbol{k}}$, das heißt die Erzeuger stehen links von den Vernichtern.

2. [*12 Punkte*] **Komplexes Klein-Gordon-Feld**

In zweiter Quantisierung wird die allgemeine Lösung $\phi(x^\mu)$ der Klein-Gordon-Gleichung zu dem Feldoperator

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int d^3p\, \frac{1}{\sqrt{2VE_{\mathbf{p}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-\imath p_\mu x^\mu} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{\imath p_\mu x^\mu}\right) \quad .$$

Die Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}}$ genügen den Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \quad , \quad \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

sowie

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \ldots = 0 \quad .$$

$\boxed{3}$ (a) Bestimmen Sie den zu $\hat{\phi}(x^\mu)$ kanonisch konjugierten Operator $\hat{\pi}(x^\mu) \equiv \partial_0\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)$ und zeigen Sie, dass $\hat{\phi}(x^\mu)$ und $\hat{\pi}(x^\mu)$ für $t=t'$ folgender Vertauschungsrelation genügen:

$$\left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\pi}(x'^\mu)\right] = \imath\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad .$$

$\boxed{3}$ (b) Die Klein-Gordon-Gleichung ist die Bewegungsgleichung, die sich aus der Lagrange-Dichte für ein Skalarfeld

$$\hat{\mathcal{L}}_{KG}\left[\hat{\phi}(x^\mu), \partial^\nu\hat{\phi}(x^\mu)\right] = \left(\partial_\nu\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right)\left(\partial^\nu\hat{\phi}(x^\mu)\right) - m_0^2\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\,\hat{\phi}(x^\mu)$$

mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt. Leiten Sie aus $\hat{\mathcal{L}}_{KG}\left[\hat{\phi}(x^\mu), \partial^\mu\hat{\phi}(x^\mu)\right]$ mithilfe der Legendre-Transformation bezüglich $\partial_0\hat{\phi}(x^\mu)$ und $\partial_0\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)$ die Hamilton-Dichte

$$\hat{\mathcal{H}}_{KG}\left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\pi}(x^\mu)\right] = \hat{\pi}^\dagger(x^\mu)\,\hat{\pi}(x^\mu) + \left(\nabla\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right)\cdot\left(\nabla\hat{\phi}(x^\mu)\right) + m_0^2\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\,\hat{\phi}(x^\mu)$$

her. Geben Sie den Hamiltonoperator eines Skalarfeldes, der der Klein-Gordon-Gleichung genügt, an.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27
thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

3 (c) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator geschrieben werden kann als

$$\hat{H} = \int d^3p \left[\hat{N}^{(a)}_{\mathbf{p}} + \hat{N}^{(b)}_{\mathbf{p}} + 1\right] E_{\mathbf{p}}$$

mit den Besetzungszahloperatoren $\hat{N}^{(a)}_{\mathbf{p}} \equiv \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}$ und $\hat{N}^{(b)}_{\mathbf{p}} \equiv \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}$.

3 (d) Um zwischen den beiden Teilchenarten unterscheiden zu können, wird der Operator

$$\hat{N} \equiv \imath \int d^3x \left[\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\,\partial_0\hat{\phi}(x^\mu) - \hat{\phi}(x^\mu)\,\partial_0\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right]$$

definiert. Zeigen Sie

$$\hat{N} = \int d^3p \left[\hat{N}^{(a)}_{\mathbf{p}} - \hat{N}^{(b)}_{\mathbf{p}}\right] \quad .$$

3. [*11 Punkte*] **Fermionen in einem äußeren Feld**

2 (a) Die Dirac-Gleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld ergibt sich aus der Substitution $\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$ (minimale Ankopplung), also:

$$(\imath\gamma^\mu(\partial_\mu + \imath eA_\mu) - m)\,\psi = 0.$$

Zeigen Sie, dass sich die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ als Summe einer freien Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ und einem Teil $\mathcal{L}_1$ schreiben lässt, welcher die Wechselwirkung mit dem Feld darstellt.

2 (b) Geben Sie den zu ψ_a adjungierten Impuls π_a und die Hamiltondichte $\mathcal{H}$ an.

3 (c) Geben Sie die Lagrangedichte des wechselwirkenden Dirac- und Strahlungsfeldes an, indem Sie $A_{e\mu}$ durch das quantisierte Strahlungsfeld ersetzen und die Lagrangedichte des freien Strahlungsfeldes addieren.

2 (d) Folgern Sie daraus die adjungierten Impulse für das Dirac- und Strahlungsfeld und den Operator der Hamiltondichte.

2 (e) Wie lauten die Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren im Heisenbergbild?

4. [*8 Punkte*] **Lorentz-Invarianz**

3 (a) Wir wollen Integrationen im Minkowski-Raum betrachten. Während $\frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta(p^2-m^2)\Theta(p^0)$ offensichtlich ein lorentzinvariantes Maß ist, da $p^2 = p^\mu p_\mu$ invariant unter Lorentztransformationen ist, gilt dies für d^3p nicht. Zeigen Sie, dass das Maß $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}$ mit $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ und $p^2 = m^2$ lorentzinvariant ist.
Hinweis: Nutzen Sie dazu $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)$ wobei $f(x_i) = 0 \;\forall\; i$ zusammen mit der quadratischen Form des Impulses.

2 (b) Die Eigenzustände des Impulsoperators in vier Dimensionen $\{|p\rangle\} = \left\{|p^0\rangle, |p^1\rangle, |p^2\rangle, |p^3\rangle\right\}$ bilden eine vollständige Basis.
Man kann sie über $|p\rangle = N(\boldsymbol{p})\,|\boldsymbol{p}\rangle$ in Beziehung zu den Dreier-Impulszuständen stellen. Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teil a) zusammen mit der Vollständigkeitsrelation um $N(\boldsymbol{p})$ zu bestimmen. Es gilt die Normierung $\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}'\rangle = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$.

3 (c) Die Eigenzustände des Impulsoperators werden durch fermionische Erzeuger aus dem Vakuum $|0\rangle$ erzeugt: in drei Dimensionen durch $\hat{\alpha}^\dagger$ und in vier Dimensionen durch $\hat{a}^\dagger$.
Leiten Sie ausgehend von

$$\hat{\alpha}^\dagger(\boldsymbol{p})\,|0\rangle = |\boldsymbol{p}\rangle, \qquad \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\,|0\rangle = |p\rangle$$

eine Beziehung zwischen den Operatoren $\hat{\alpha}(\boldsymbol{p})$ und $\hat{a}(\boldsymbol{p})$ her. Bestimmen Sie die Antikommutatorrelationen der Operatoren $\hat{a}(\boldsymbol{p})$.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
thierry@lusi.uni-sb.de johannes@lusi.uni-sb.de