13. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 10.07.2019 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*8 Punkte*] **Feldoperatorrelationen des quantisierten Dirac-Feldes**

Für die Feldoperatoren des quantisierten Dirac-Feldes gelten die folgenden Antikommutatorrelationen:

$$\left\{\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t),\hat{\psi}(\boldsymbol{x}',t)\right\} = \left\{\bar{\hat{\psi}}(\boldsymbol{x},t),\bar{\hat{\psi}}(\boldsymbol{x}',t)\right\} = 0,$$
$$\left\{\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t),\bar{\hat{\psi}}(\boldsymbol{x}',t)\right\} = \gamma^0\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

Nutzen Sie diese, um

$$\left[\bar{\hat{\psi}}(\boldsymbol{x},t)u_1\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t),\bar{\hat{\psi}}(\boldsymbol{x}',t)u_2\hat{\psi}(\boldsymbol{x}',t)\right] = 0 \text{ für } \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}'$$

für beliebige 4×4-Matrizen u_1, u_2 zu zeigen.

Hinweis: Zeigen Sie dazu zuerst die folgende Kommutatorrelation

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\hat{D}\right] = \hat{A}\left\{\hat{B},\hat{C}\right\}\hat{D} - \hat{A}\hat{C}\left\{\hat{B},\hat{D}\right\} - \hat{C}\left\{\hat{A},\hat{D}\right\}\hat{B} + \left\{\hat{C},\hat{A}\right\}\hat{D}\hat{B}.$$

2. [*8 Punkte*] **Erwartungswerte des EM-Feldes**

Die Komponenten des Viererpotentials A^μ sind in Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ im quellfreien Fall gegeben durch

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\left\{e^{\imath kx}\hat{a}_\mu^\dagger(\boldsymbol{k}) + e^{-\imath kx}\hat{a}_\mu(\boldsymbol{k})\right\},$$

wobei $k=(\omega,\boldsymbol{k})$, $\omega=|\boldsymbol{k}|$, $kx = k^\mu x_\mu = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ und die Operatoren den in der Vorlesung gezeigten Bose-Vertauschungsrelationen genügen. Im Zuge eines Basiswechsels werden die Operatoren

$$\hat{\alpha}_0^\dagger(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_0^\dagger(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{e}_3\cdot\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k})), \qquad \hat{\alpha}_1^\dagger(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{e}_1\cdot\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k}),$$
$$\hat{\alpha}_2^\dagger(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{e}_2\cdot\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k}), \qquad \hat{\alpha}_3^\dagger(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_0^\dagger(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{e}_3\cdot\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k}))$$

mit $\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger = (\hat{a}_1^\dagger,\hat{a}_2^\dagger,\hat{a}_3^\dagger)$ eingeführt. Dabei bilden die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3 := \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ ein orthonormales Dreibein mit $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$. In der Vorlesung wurde im Rahmen des Gupta-Bleuler-Verfahrens gezeigt, dass $\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{e}_1\hat{\alpha}_1^\dagger(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{e}_2\hat{\alpha}_2^\dagger(\boldsymbol{k})$ gilt. Zeigen Sie, dass für die Erwartungswerte von Energie p^0 und Impuls $\boldsymbol{p}$ in einem beliebigen physikalischen Zustand gilt:

$$\langle p^0\rangle = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\,\omega\left\langle\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{\alpha}_i^\dagger(\boldsymbol{k})\hat{\alpha}_i(\boldsymbol{k}) + \hat{\alpha}_i(\boldsymbol{k})\hat{\alpha}_i^\dagger(\boldsymbol{k})\right)\right\rangle,$$
$$\langle \boldsymbol{p}\rangle = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\,\boldsymbol{k}\left\langle\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{\alpha}_i^\dagger(\boldsymbol{k})\hat{\alpha}_i(\boldsymbol{k}) + \hat{\alpha}_i(\boldsymbol{k})\hat{\alpha}_i^\dagger(\boldsymbol{k})\right)\right\rangle.$$

Hinweis: Verwenden Sie dazu $p^0 = \int d^3x\,\frac{1}{2}[\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{x})]$ und $\boldsymbol{p} = \int d^3x\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 johannes@lusi.uni-sb.de

3. [*8 Punkte*] **Wick's Theorem**

$A, B, C, ..., Z$ bezeichne Feldoperatoren, $T(\cdot)$ das zeitgeordnete Produkt und $N(\cdot)$ das normalgeordnete Produkt sowie in der Vorlesung definiert. Definitionsgemäß verschwindet der Vakuum Erwartungswert von normalgeordneten Produkten

$$< 0|N(ABC...Z)|0 >= 0$$

Wir definieren "die Kontraktion" zweier Feldoperatoren als:

$$\overset{\sqcap}{AB} := T(AB) - N(AB)$$

Als Wick'sches Theorem bezeichnen wir die Aussage:

$$T(ABC...Z) = N\left(ABC...Z + \text{ alle möglichen Kontraktionen } \right) \tag{1}$$

$\boxed{2}$ (a) Bestimmen Sie alle möglichen Kontraktionen der vier Operatoren $ABCD$.

$\boxed{2}$ (b) Nehmen Sie an es handelt sich bei dem vier Operatoren $ABCD$ um bosonische Operatoren. Wie vereinfacht sich der Vakuumerwartungswert $< 0|T(ABCD)|0 >$?

$\boxed{4}$ (c) Nun nehmen wir die sechs Dirac-Spinoren $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_\gamma, \psi_\delta, \psi_\epsilon, \psi_\eta$ an. Vereinfachen sie den folgenden Ausdruck:

$$< 0|T\left(\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4)\psi_\epsilon(x_5)\bar{\psi}_\eta(x_6)\right)|0 >$$

Hinweis: Verwenden Sie $< 0|T\left(\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\right)|0 > -iS_F(x_1 - x_2)$, siehe Aufgabe 4b)

4. [*8 Punkte*] **Feynman-Propagator**

$\boxed{4}$ (a) Zeigen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung, dass für den Photon-Propagator gilt:

$$\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y))|0\rangle = \imath g_{\mu\nu} D_F(x-y) = \lim_{\epsilon \to +0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-\imath k(x-y)} \frac{-\imath g_{\mu\nu}}{k^2 + \imath\epsilon}$$

mit

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{-\imath k(x-y)}.$$

$\boxed{4}$ (b) Das zeitgeordnete Produkt zweier Dirac-Spinorkomponenten ist definiert über

$$T(\psi_\mu(x)\bar{\psi}_\nu(y)) = \theta(x^0 - y^0)\psi_\mu(x)\bar{\psi}_\nu(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}_\nu(y)\psi_\mu(x).$$

Zeigen Sie, dass für den Propagator des freien Elektrons gilt:

$$\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle = -\imath S_F(x-y) = \lim_{\epsilon \to +0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-\imath p(x-y)} \frac{\imath(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + \imath\epsilon}.$$

5. [*8 Punkte*] **Streuamplitude**

Für die Streuamplitude gilt in n-ter Ordnung

$$\langle f|S^{(n)}|i\rangle = \frac{(-\imath e)^n}{n!} \int d^4x_1 ... d^4x_n \langle f|T(:\bar{\psi}(x_1)\not{A}(x_1)\psi(x_1): \; ... \; :\bar{\psi}(x_n)\not{A}(x_n)\psi(x_n):)|i\rangle.$$

Betrachten Sie Compton-Streuung aus einem Anfangszustand $|i\rangle = b^\dagger_{\boldsymbol{p}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle = b^\dagger_{\boldsymbol{p}'} a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}|0\rangle$.

$\boxed{4}$ (a) Drücken Sie die Streuamplitude in zweiter Ordnung in e als Integral über ein Produkt von Propagatoren aus. Werten Sie dazu das Matrixelement mittels Vertauschungsrelationen aus.

$\boxed{4}$ (b) Verwenden Sie das Wick'sche Theorem um die Streuamplitude in vierter Ordnung in e als Integral über ein Produkt von Propagatoren zu schreiben.

THIERRY FREDRICH, E2 6, Zi.4.27 JOHANNES SICKS, E2 6, Zi.4.24
thierry@lusi.uni-sb.de johannes@lusi.uni-sb.de