6. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 22.05.2019 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*6 Punkte*] **Dynamische Suszeptibilität und Leistungsaufnahme eines gedämpften harm. Oszillators**

2 (a) Die Bewegungsgleichung eines klassischen, gedämpften harm. Oszillators lautet allgemein

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x(t) = K(t)/m$$

mit der Masse m, der Frequenz ω_0, der Dämpfungskonstanten γ und einer externen, zeitabhängigen Antriebskraft $K(t)$. Bestimmen Sie die Funktionen $\chi(\omega)$, $\chi'(\omega)$, $\chi''(\omega)$ und $G^>(\omega)$.
Anleitung: Lösen Sie dazu die Bewegungsgleichung im Fourierraum und bestimmen Sie die dynamische Suszeptibilität aus $\chi(\omega) = \frac{dx(\omega)}{dK(\omega)}$.

4 (b) Nun betrachten wir den Spezialfall eines periodisch angetrieben Oszillators mit der Antriebskraft $K(t)/m = \frac{k}{m}cos(\omega t)$.

i. Zeigen Sie, dass die Amplitude der Schwingung proportional zum Betrag der linearen Responsefunktion $|\chi|$ des Oszillators ist. Lösen Sie dazu die Bewegungsgleichung im komplexen Fall für $z = x + \imath \cdot y$ mit $K(t) = \frac{k}{m}e^{\imath\omega t}$ und leiten Sie daraus die statische Lösung $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ ab.

ii. Die Leistungsaufnahme eines Oszillators ist definiert als $P(t) = K(t) \cdot \dot{x}(t)$.
Zeigen Sie, dass die mittlere Leistungsaufnahme $\bar{P} = \langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\ P(t)$ des Oszillators proportional zur Intensität der Anregung k^2 und dem Imaginärteil der linearen Responsefunktion ist.

2. [*10 Punkte*] **Kohärente Zustände**

Unter einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ versteht man einen Zustand, für den gilt:

$$\hat{b}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \quad .$$

Um einen Übergang zur makroskopischen Elektrodynamik zu erreichen, kann man Zustände mit verschiedenen Teilchenzahlen linear kombinieren zu:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \quad .$$

1 (a) Zeigen Sie, dass der oben angegebene Zustand $|\alpha\rangle$ in der Tat ein kohärenter Zustand ist.

1 (b) Zeigen Sie die Äquivalenz obiger Darstellung der kohärenten Zustände zu folgender Darstellung mithilfe des Verschiebungsoperators $\hat{D}(\alpha)$:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\,|0\rangle = e^{\left(\alpha\hat{b}^\dagger - \alpha^*\hat{b}\right)}\,|0\rangle \quad .$$

2 (c) Berechnen Sie den Überlapp $\langle\alpha|\alpha'\rangle$ sowie dessen Betragsquadrat $|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2$ für zwei kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\alpha'\rangle$. Was geschieht im Grenzfall $|\alpha - \alpha'| \gg 1$ mit dem Betragsquadrat?

2 (d) Beweisen Sie die Vollständigkeitsrelation der kohärenten Zustände:

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha| = \hat{\mathbb{1}} \quad .$$

Hinweis: $\alpha = |\alpha|\,e^{\imath\theta} \quad , \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\theta\, e^{\imath\left(n-n'\right)\theta} = \delta_{n,n'} \quad , \quad \int\limits_0^{\infty} d\beta\,\beta^n e^{-\beta} = \Gamma(n+1) \overset{n\in\mathbb{N}}{=} n!$

2 (e) Nutzen Sie die Resultate der beiden vorherigen Teilaufgaben, um zu begründen, weshalb ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ nach den anderen $|\alpha'\rangle$ entwickelt werden kann, und führen Sie die Entwicklung konkret durch. Was bedeutet dies für die Basis der kohärenten Zustände?

2 (f) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung $|\alpha(t)\rangle$ eines kohärenten Zustandes sowie $|\langle\alpha(0)\,|\alpha(t)\rangle|^2$. Wie lautet der Maximal-, wie der Minimalwert von $|\langle\alpha(0)\,|\alpha(t)\rangle|^2$?

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27
thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

3. [*14 Punkte*] **BCS-Theorie der Supraleitung**

Betrachten Sie ein System, dessen Elektronen nur über ein spinunabhängiges Potential miteinander wechselwirken. Die BCS-Theorie zur Beschreibung der Supraleitung in dem betrachteten System beschränkt sich auf die Wechselwirkung zwischen Elektronenpaaren mit verschwindendem Gesamtimpuls und entgegengesetzten Spins, sodass sich der Hamiltonoperator vereinfacht zu

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \overline{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow} \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}',\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}',\uparrow} \quad .$$

Wir betrachten den BCS-Hamiltonoperator im Folgenden in der Mean-Field Näherung. Dabei ergibt sich unter Vernachlässigung konstanter Terme:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \left(\Delta^*_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} + \Delta_{\mathbf{k}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow} \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},\downarrow} \right) \quad \text{mit} \quad \Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} \overline{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \langle \hat{a}_{-\mathbf{k}',\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}',\uparrow} \rangle \quad .$$

Der Erwartungswert $\langle \hat{a}_{-\mathbf{k}',\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}',\uparrow} \rangle$ ist dabei im Grundzustand des Systems zu bilden.

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass mithilfe des Nambu-Spinors $\hat{\Psi}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} \\ \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},\downarrow} \end{pmatrix}$, dass der BCS-Hamiltonoperator unter Vernachlässigung einer Konstante auf die Gestalt $\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\Psi}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \mathcal{H} \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}$ gebracht werden kann und geben Sie die (2×2)-Matrix $\mathcal{H}$ explizit an.

$\boxed{4}$ (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_{\mathbf{k}}$ von $\mathcal{H}$ und die unitäre Transformation $U = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & -v_{\mathbf{k}} \\ v^*_{\mathbf{k}} & u^*_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$, sodass $U^H \mathcal{H} U$ diagonal ist. Beachten Sie dabei eine mögliche Phase in $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$.

$\boxed{3}$ (c) Zeigen Sie, dass der BCS-Hamiltonoperator ausgedrückt über die transformierten Operatoren $\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\uparrow} \\ \hat{\alpha}^{\dagger}_{-\mathbf{k},\downarrow} \end{pmatrix} = U^H \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} \\ \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},\downarrow} \end{pmatrix}$ diagonal ist. Welcher Bedingung müssen die Phasenfunktionen in den Phasenfaktoren von $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ genügen, damit die Transformation kanonisch ist, d. h. die transformierten Operatoren wiederum Fermioperatoren darstellen?

$\boxed{3}$ (d) Zeigen Sie, dass der Zustand $|BCS\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(1 + \frac{v_{\mathbf{k}}}{u^*_{\mathbf{k}}} \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow} \right) |0\rangle$ Grundzustand des BCS-Hamiltonoperators ist.

$\boxed{2}$ (e) Nutzen Sie $\langle \hat{\alpha}^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\uparrow} \rangle = n(E_{\mathbf{k}})$, um eine Selbstkonsistenzgleichung für die Energielücke $\Delta_{\mathbf{k}}$ herzuleiten. Diese Gleichung wird auch als BCS-Gleichung bezeichnet.

4. [*10 Punkte*] **Hamiltonfunktion des Strahlungsfeldes**

Wir verwenden den üblichen metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ mit der Signatur $diag(+---)$,die Einsteinsche Summenkonvention und die Vierervektoren $\{x^\mu\} = (t, \vec{x})$, $\{A^\mu\} = (\phi, \vec{A})$, $\{j^\mu\} = (\rho, \vec{j})$.
Damit können die Vierervektoren von ihrer kontravarianten Form in die kovariate Form durch: $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$ überführt werden und die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes geschrieben werden als: $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist dabei gegeben durch

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ (a) Leiten Sie die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$$

mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen her.

$\boxed{6}$ (b) Bestimmen Sie den kanonisch konjugierten Impuls Π^μ und die Hamiltondichte $\mathcal{H}$

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}, \qquad \mathcal{H} = \Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L},$$

und zeigen sie damit, dass die Hamiltonfunktion H des freien Strahlungsfeldes eine aus der Elekrodynamik bekannte Form annimmt:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) d\boldsymbol{r}.$$

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 — thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 — johannes@lusi.uni-sb.de