7. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 29.05.2019 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*14 Punkte*] **Feldoperatoren und Impuls des Strahlungsfeldes**
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Operator des Vektorpotentials gegeben ist durch

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left(\hat{a}_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{\imath(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)} + \hat{a}^\dagger_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{-\imath(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)} \right) \boldsymbol{u}_\lambda(\boldsymbol{k}).$$

4 (a) Berechnen Sie die Feldoperatoren $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)$ des elektrischen bzw. magnetischen Feldes in Coulomb-Eichung.

10 (b) Der Operator für den Impuls des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{4\pi c} \int (\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{B}})\, d\boldsymbol{r}$$

und der Operator für den Spin-Anteil des Drehimpulses lautet

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \frac{1}{4\pi c} \int (\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{A}})\, d\boldsymbol{r}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda} \hbar\boldsymbol{k}\, \hat{a}^\dagger_\lambda(\boldsymbol{k}) \hat{a}_\lambda(\boldsymbol{k})$$

und

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar \frac{\boldsymbol{k}}{k} \left(\hat{a}^\dagger_+(\boldsymbol{k}) \hat{a}_+(\boldsymbol{k}) - \hat{a}^\dagger_-(\boldsymbol{k}) \hat{a}_-(\boldsymbol{k}) \right)$$

wobei

$$\hat{a}_\pm(\boldsymbol{k}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1(\boldsymbol{k}) \pm \imath \hat{a}_2(\boldsymbol{k}))$$

2. [*14 Punkte*] **Kommutatorrelationen des elektromagnetischen Feldes**
Da die Leiteroperatoren nicht kommutieren, werden die Feldoperatoren $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)$, $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)$ im Allgemeinen auch nicht kommutieren.

6 (a) Zeigen Sie zunächst die folgenden Relationen zwischen dem Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ und den zugehörigen Polarisationsvektoren $u_\lambda(\boldsymbol{k})$:

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda u_{\lambda,l} u_{\lambda,m} &= \delta_{l,m} - \frac{k_l k_m}{|\boldsymbol{k}|^2}, \\
\sum_\lambda \frac{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}_\lambda)_l}{|\boldsymbol{k}|} \frac{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}_\lambda)_m}{|\boldsymbol{k}|} &= \delta_{l,m} - \frac{k_l k_m}{|\boldsymbol{k}|^2}, \\
\sum_\lambda u_{\lambda,l} \frac{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}_\lambda)_m}{|\boldsymbol{k}|} &= \sum_n \epsilon_{lmn} \frac{k_n}{|\boldsymbol{k}|}.
\end{aligned}$$

für l, m, $n \in \{x, y, z\}$, wobei ϵ_{lmn} der Levi-Civita-Tensor ist.

8 (b) Zeigen Sie damit die folgenden Kommutatorbeziehungen der kartesischen Feldkomponenten $\hat{E}_l(\boldsymbol{r},t)$, $\hat{B}_l(\boldsymbol{r},t)$ in Coulomb-Eichung:

$$\begin{aligned}
[\hat{E}_l(\boldsymbol{r},t), \hat{E}_m(\boldsymbol{r}',t)] &= [\hat{B}_l(\boldsymbol{r},t), \hat{B}_m(\boldsymbol{r}',t)] = 0 \\
[\hat{E}_l(\boldsymbol{r},t), \hat{B}_m(\boldsymbol{r}',t)] &= -4\pi\imath c\hbar\, \epsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial x_n} \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')
\end{aligned}$$

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 johannes@lusi.uni-sb.de

3. [*12 Punkte*] **Induzierte Emission, spontane Emission und Absorption von Photonen**
Zur Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Strahlungsfeld und Materie betrachten wir den Hamiltonian des Gesamtsystems

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{em}} + \hat{H}_{\text{mat}} + \hat{H}_{\text{I}},$$

wobei

$$\hat{H}_{\text{em}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \left(\hat{N}_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\right), \qquad \hat{H}_{\text{mat}} = \sum_j \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_j^2}{2m_j} + V(\hat{\boldsymbol{r}}_1, \hat{\boldsymbol{r}}_2, ...).$$

Im Folgenden soll das Wasserstoffatom betrachtet werden, sodass die Summation im Materiehamiltonian über das Proton und das Elektron erfolgt:

$$\hat{H}_{\text{mat}} = \frac{\hat{p}_p^2}{2m_p} + \frac{\hat{p}_e^2}{2m_e} - \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_e|}.$$

$\boxed{4}$ (a) Zeigen Sie, dass in Dipolnäherung die Wechselwirkung zwischen Strahlungsfeld und Wasserstoffatom mit Minimalsubstitution in Coulomb-Eichung gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{I}} = \hat{H}_{\text{I}}^{(1)} + \hat{H}_{\text{I}}^{(2)} &= -\sum_j \frac{e_j}{m_j c} \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_j, t) \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_j + \sum_j \frac{e_j^2}{2m_j c^2} (\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_j, t))^2 \\ &= -\frac{e}{\mu c} \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{R}, t) \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + \frac{e^2}{2\mu c^2} \left(\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{R}, t)\right)^2.\end{aligned}$$

Führen Sie dazu Schwerpunkts- und Relativkoordinaten wie folgt ein:

$$\begin{aligned} M &= m_p + m_e, & \mu &= \frac{m_p m_e}{M}, \\ \boldsymbol{R} &= \frac{m_p}{M}\boldsymbol{r}_p + \frac{m_e}{M}\boldsymbol{r}_e, & \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_e, \\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p}_p + \boldsymbol{p}_e, & \boldsymbol{p} &= \frac{m_e \boldsymbol{p}_p - m_p \boldsymbol{p}_e}{M}. \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (b) Wir wollen im Folgenden die erlaubten Prozesse in 1. Ordnung der Störungstheorie untersuchen. Dazu benutzen wir Fermi's goldene Regel

$$\Gamma_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta\left(E_i - E_f\right) |\langle f| \hat{H} |i\rangle|^2$$

und nehmen die Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{mat}} |\epsilon_i\rangle &= \epsilon_i |\epsilon_i\rangle, \\ \hat{H}_{\text{em}} |\{n_{\boldsymbol{k}}\}\rangle &= \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \left(n_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\right) |\{n_{\boldsymbol{k}}\}\rangle. \end{aligned}$$

mit den jeweiligen Eigenzuständen $|\epsilon_i\rangle$ und $|\{n_{\boldsymbol{k}}\}\rangle$ an. Betrachten Sie nun die Wirkung von $\hat{H}_{\text{I}}^{(1)}$ auf einen gemeinsamen Anfangszustand. Die drei folgenden Zustände sollen diskutiert werden:

i. $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |0\rangle$,
ii. $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |1_{\boldsymbol{k}}\rangle$,
iii. $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |n_{\boldsymbol{k}}\rangle$.

Welche photonischen Prozesse können folglich ablaufen?
Welche photonischen Prozesse werden allgemein durch $\hat{H}_{\text{I}}^{(2)}$ induziert?

$\boxed{4}$ (c) Setzen Sie im Folgenden $\boldsymbol{R} = 0$ und vernachlässigen Sie $\hat{H}_{\text{I}}^{(2)}$.

i. Berechnen Sie nun die vollständige Übergangsrate von einem Anfangszustand $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |0\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle = |\epsilon_f\rangle \otimes |1_{\boldsymbol{k}}\rangle$.
ii. Führen Sie anschließend den thermodynamischen Limes aus um die mittlere Lebensdauer des Anfangszustandes zu bestimmen.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 — thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 — johannes@lusi.uni-sb.de