8. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 05.06.2019 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2.6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*8 Punkte*] **Kanonische Quantisierung des Strahlungsfeldes**

Die Lagrangefunktion eines elektromagnetischen Feldes, in dem keine Ladungen und Ströme wirken, kann in Coulombeichung dargestellt werden als

$$L = \frac{1}{8\pi} \int d^3k \left(\dot{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) \dot{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) - c^2 k^2 \mathcal{A}^*(\mathbf{k}) \mathcal{A}(\mathbf{k}) \right)$$

Hierbei sind $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ und $\mathcal{A}^*(\mathbf{k})$ die Fourier-Transformierten von $A(\mathbf{r})$ bzw. $A^*(\mathbf{r})$.

$\boxed{3}$ (a) Zeigen Sie, dass die Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{A}}} \right)^* - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}} \right)^* = 0$$

der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ auf eine Wellengleichung für $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ führt. Verifizieren Sie, dass der Ansatz

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-\imath\omega_k t} + a_{\mathbf{k}}^* e^{\imath\omega_k t} \right) \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \tag{\#}$$

diese Gleichung löst.

$\boxed{2}$ (b) Wir führen nun den kanonisch konjugierten Impuls ein:

$$\Pi(\mathbf{k}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{A}}} \right)^* \quad .$$

Berechnen Sie diesen und drücken Sie ihn durch die Entwicklungskoeffizienten $a_{\mathbf{k}}$ und $a_{\mathbf{k}}^*$ aus.

$\boxed{3}$ (c) Im Zuge der Quantisierung werden $\mathcal{A}$ und Π zu den Operatoren $\hat{\mathcal{A}}$ und $\hat{\Pi}$. Dabei werden aus den Entwicklungskoeffizienten $a_{\mathbf{k}}$ und $a_{\mathbf{k}}^*$ in Gleichung # zu den entsprechenden Operatoren:

$$\hat{a}_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{\mathcal{A}}_n(\mathbf{k}) + \imath \hat{\Pi}_n(\mathbf{k}) \right) \quad , \quad \hat{a}_n^\dagger(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{\mathcal{A}}_n(\mathbf{k}) - \imath \hat{\Pi}_n(\mathbf{k}) \right)$$

Beweisen Sie, durch überprüfen der Kommutatorrelationen

$$[\hat{\mathcal{A}}_n(\mathbf{k}), \hat{\mathcal{A}}_m(\mathbf{k}')] = 0$$
$$[\hat{\Pi}_n(\mathbf{k}), \hat{\Pi}_m(\mathbf{k}')] = 0$$
$$[\hat{\mathcal{A}}_n(\mathbf{k}), \hat{\Pi}_m(\mathbf{k}')] = \imath\hbar\delta_{nm}\delta_{kk'}$$

, dass es sich um bosonische Auf- und Absteigeroperatoren handelt.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 johannes@lusi.uni-sb.de

2. [*10 Punkte*] **Greensche Funktionen**

Wir betrachten nun zeitabhängige Teilchenzustände in der Feldoperatordarstellung. Dazu transformiert man den anfänglichen Feldoperator mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}, t) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t} \hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r})\, e^{-\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t} \quad .$$

$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ und $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ sind dabei fermionische Erzeuger- und Vernichteroperatoren, die die bekannten Antikommutatorrelationen erfüllen.

3 (a) Zeigen Sie durch Entwicklung von $\hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r})$, dass die Feldoperatoren wie folgt dargestellt werden können:

$$\hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-\imath \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{\imath\varepsilon_{\mathbf{k}} t} \quad ; \quad \hat{\psi}_0 (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{\imath \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-\imath\varepsilon_{\mathbf{k}} t} \quad .$$

3 (b) Die Anfangskoordinaten bzw. -zeit seien $\mathbf{r}_a$ und t_a. Man definiert:

$$\left(\hat{\psi}_0 (\mathbf{r}, t)\, \hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}_a, t_a) + \hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}_a, t_a)\, \hat{\psi}_0 (\mathbf{r}, t)\right) |\Phi (0)\rangle = \imath G_0 (\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_a, t_a) \,|\Phi (0)\rangle \quad ,$$

Leiten Sie die folgende Darstellung des sogenannten Propagators für $t \geq t_a$ her:

$$G_0 (\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_a, t_a) = -\frac{\imath}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{\imath \mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) - \imath\varepsilon_{\mathbf{k}}(t-t_a)} \quad .$$

4 (c) $G_0 (\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_a, t_a)$ beschreibt die Ausbreitung eines freien Teilchens von $\mathbf{r}_a, t_a$ nach $\mathbf{r}, t$ und ist 0 für $t < t_a$. Zeigen Sie, dass der Propagator mithilfe des Zeitordnungsoperators als

$$G_0 (\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_a, t_a) = -\imath \langle 0|\, \hat{T} \hat{\psi}_0 (\mathbf{r}, t)\, \hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}_a, t_a)\, |0\rangle$$

geschrieben werden kann, wobei für den Zeitordnungsoperator $\hat{T}$ gilt:

$$\hat{T} \hat{\psi} (\mathbf{r}, t)\, \hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r}', t') = \hat{\psi} (\mathbf{r}, t)\, \hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r}', t')\, \Theta (t - t') - \hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r}', t')\, \hat{\psi} (\mathbf{r}, t)\, \Theta (t' - t) \quad .$$

3. [*13 Punkte*] **Lorentz-Transformationen**

2 (a) Verifizieren Sie explizit die Invarianz des Raumzeitintervalls $s^2 = c^2t^2 - \mathbf{r}^2$ unter der in der Vorlesung angegebenen Standard-Lorentz-Transformation.

2 (b) Sind normale Drehungen (im 3-dim. Raum) Lorentz-Transformationen? Wie steht es mit Zeit- und Raumspiegelungen?

2 (c) Kommutieren zwei hintereinander ausgeführte Lorentz-Transformationen?

1 (d) Wieviele Parameter hat eine Lorentz-Transformation?

2 (e) Welche Werte kann die Determinante einer Lorentz-Transformation annehmen?

2 (f) Zeigen Sie, dass die Lorentz-Transformationen bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

2 (g) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $a_\mu b^\mu$ zweier Vierervektoren a_μ, b^μ invariant unter Lorentz-Transformation ist (siehe auch Blatt 6, Aufgabe 4) .

4. [*9 Punkte*] **Vierervektoren**

2 (a) Wir definieren den Energie-Impuls-Vierervektor $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)^T$. Nutzen Sie die Lorentz-Transformation, um das Transformationsverhalten von E sowie der Komponenten des Impulses zu bestimmen. Gehen Sie dabei von den bekannten Werten für einen ruhenden Körper aus. Bestimmen Sie anschließend die Invariante des Energie-Impuls-Vierervektors.

3 (b) In Analogie zum kl. Fall definieren wir den Vierervektor der Geschwindigkeit gemäß $p^\mu = m_0 v^\mu$. Bestimmen Sie die Invariante des Geschwindigkeitsvierervektors.
Die Definition der Eigenzeit τ lautet $s^2 = x_\mu x^\mu \equiv c^2\tau^2$. Zeigen sie, dass $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ gilt.

4 (c) Zeigen Sie ausgehend von dem bekannten Ausdruck für die Lorentzkraft $\mathbf{F}_L = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$, dass der Vierervektor der Lorentzkraft die Gestalt $F^\mu_L = \frac{q}{c}\left[v_\nu \left(\partial^\mu A^\nu\right) - \frac{dA^\mu}{d\tau}\right]$ hat. Multiplizieren Sie dazu $\mathbf{F}_L$ mit dem Lorentzfaktor γ, nutzen Sie den Vierergradienten $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)^T$, das Viererpotential $A^\mu = \left(\phi, \mathbf{A}\right)^T$ mit dem skalaren Potential ϕ und dem Vektorpotential $\mathbf{A}$. Vereinfachen Sie den Ausdruck für F^0_L.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
thierry@lusi.uni-sb.de johannes@lusi.uni-sb.de