Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 12.06.2019 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*10 Punkte*] **Lorentz-Transformation des elektromagnetischen Feldes**

5 (a) Leiten Sie aus dem Transformationsverhalten des Feldstärketensors

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma F_{\rho\sigma}$$

das Transformationsverhalten der Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ unter einer Lorentz-Transformation entlang der z-Achse her.
Für den Feldstärketensor und die Lorenz-Transformation entlang der z-Achse gilt dabei:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

(b) Ein punkförmiges Teilchen mit der elektrischen Ladung Q befinde sich in einem Inertialsystem K in Ruhe. Das System K bewege siche gegenüber dem Laborsystem K' mit der Geschwindigkeit v parallel zur z-Achse.

2 i. Bestimmen Sie die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ im Ruhesystem des Teilchens und berechnen Sie daraus die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$.

3 ii. Berechnen Sie die Größen $\boldsymbol{E}'$ und $\boldsymbol{B}'$ im Laborsystem unter Verwendung der Lorentz-Transformation.

2. [*6 Punkte*] **Relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld**

Die kovariante Lagrangefunktion für ein relativistisches Teilchen mit Masse m und Ladung q im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$L(x^\mu, v^\mu, \tau) = -m\, v^\mu v_\mu - \frac{q}{c}\, v^\mu A_\mu .$$

Dabei ist $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ der Vierer-Ort, $v^\mu = \gamma(c, \boldsymbol{v})$ die Vierer-Geschwindigkeit, $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ das Vierer-Potential und τ die Eigenzeit. Leiten Sie mit Hilfe der kovarianten Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

die kovariante Kraftgleichung her:

$$K_\mu = m\frac{d}{d\tau} v_\mu = \frac{q}{c}\left[\partial_\mu(v^\mu A_\mu) - \frac{d}{d\tau} A_\mu\right].$$

Anmerkung: Wie in Aufgabe 4 von Blatt 8 gezeigt wurde, beschreiben die Raumkomponenten der Vierer-Kraft $K^\mu = \gamma\,(\boldsymbol{F}_\mathrm{L}\cdot\boldsymbol{v}/c,\ \boldsymbol{F}_\mathrm{L})$ somit die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = q(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B})$.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27
thierry@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

3. [*7 Punkte*] **Nichtrelativistischer Grenzfall der Klein-Gordon-Gleichung**

Leiten Sie den nichtrelativistischen Grenzfall der freien Klein-Gordon-Gleichung her. Nehmen Sie dabei an, dass die Energie $E' = E - m_0c^2$ nichtrelativistisch ist, das heißt $E' \ll m_0c^2$. Verwenden Sie den Ansatz

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\imath \frac{m_0 c^2}{\hbar} t} \phi(\mathbf{r}, t),$$

um zu zeigen, dass sich im nichtrelativistischen Fall die Schrödingergleichung ergibt. Diskutieren Sie auch das Verhalten der „Wahrscheinlichkeitsdichte" ρ

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2} \left(\psi^\star \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^\star}{\partial t} \right)$$

der Klein-Gordon-Gleichung in diesem Fall. Hinweis: $|\imath\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}| \approx E'\phi \ll m_0c^2\phi$

4. [*7 Punkte*] **Schrödinger-Form der Klein-Gordon-Gleichung**

$\boxed{3}$ (a) Zeigen Sie, dass für den freien Fall jede Komponente der Schrödingerschen Form

$$\left(\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_f\right)\Psi = 0, \qquad \hat{H}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m_0c^2, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

$$\rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta(\phi + \chi) + m_0c^2\phi, \qquad i\hbar\frac{\partial \chi}{\partial t} = +\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta(\phi + \chi) - m_0c^2\chi$$

der Klein-Gordon-Gleichung genügt.
Hinweis: Zeigen sie, dass $(\phi + \chi)$ und $(\phi - \chi)$ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen.

$\boxed{2}$ (b) Lösen Sie die freie Klein-Gordon-Gleichung in Schrödinger-Form mit Hilfe des Ansatzes

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{\frac{-\imath}{\hbar}(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}.$$

$\boxed{2}$ (c) Diskutieren Sie den nichtrelativistischen Grenzfall der Lösung aus b).
Hinweis: Entwickeln Sie die Normierungskonstante A sowie ϕ_0 und χ_0 in v/c.

5. [*10 Punkte*] **Dirac-Gleichung - Teil I**

Der relativistische Hamiltonoperator für Fermionen ist gegeben durch

$$\hat{H}_{\text{Dirac}} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + mc^2\hat{\beta} \quad \text{mit} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{1}}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{\mathbb{1}}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_j \\ \hat{\sigma}_j & 0 \end{pmatrix} \quad j = x, y, z \quad .$$

Dabei beschreiben $\hat{\sigma}_j$ die Pauli-Matrizen.

$\boxed{3}$ (a) Zeigen Sie, dass für die Matrizen $\hat{\alpha}_j$ und $\hat{\beta}$ gilt

$$\left\{\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_n\right\} = 2\delta_{mn}\hat{\mathbb{1}}_4, \quad \left\{\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}\right\} = 0, \quad \hat{\alpha}_j^2 = \hat{\beta}^2 = \hat{\mathbb{1}}_4.$$

$\boxed{4}$ (b) Leiten Sie ausgehend von

$$\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{x}) = \hat{H}_{\text{Dirac}}\psi(t, \boldsymbol{x})$$

die kovariante Form der Dirac-Gleichung

$$(\imath\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu - m)\psi(t, \boldsymbol{x}) = 0$$

her. Für die γ-Matrizen gilt $\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i$

$\boxed{3}$ (c) Geben Sie $\hat{H}^2_{\text{Dirac}}$ an und zeigen Sie, dass die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ erfüllt ist. Diskutieren Sie die Eigenenergien eines ruhenden Teilchens.

Thierry Fredrich, E2 6, Zi.4.27 Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
thierry@lusi.uni-sb.de johannes@lusi.uni-sb.de