

Quantenmechanik II

Quantisierung des klassischen Strahlungsfeldes (1)

Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Freie elektromagnetische Felder

In Coulomb-Eichung ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) reduzieren sich die Maxwellgleichungen für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x}, t)$ und dem Skalarpotential $\varphi(\vec{x}, t)$ im Vakuum (ohne Quellen) auf

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0, & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}, \\ \square \vec{A} &= 0, & \square &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \Delta.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Die Felder erhält man dann mittels

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi.\tag{5.4}$$

Die Lösungen der freien Maxwellgleichungen (5.3) können zu $\varphi = 0$ gewählt werden, da im Unendlichen das Potential verschwindet

Transversale elektromagnetische Felder

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind wie $\vec{A}$ *transversale Felder*, denn für eine ebene Welle

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

führt $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ auf $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$. Deswegen heißt die Coulomb-Eichung auch *transversale Eichung*. Es hat sich als günstig erwiesen, die Coulomb-Eichung auch für die Quantisierung beizubehalten.

Feldenergie

Keine Quantisierung ohne Hamiltonoperator, und dazu brauchen wir den Ausdruck für die Gesamtenergie

$$E_{kl} = \frac{1}{8\pi} \int \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) d^3r \quad (5.5)$$

des Strahlungsfeldes. Wir suchen nun einen Operator $\vec{A}_{op}$ für das Vektorpotential so dass

$$i\hbar \frac{d}{dt} \vec{A}_{op} = [\vec{A}_{op}, H] \quad \Longleftrightarrow \quad \square \vec{A} = 0 \quad (5.6)$$

mit $H \hat{=} E_{kl}$ gilt.

Periodische Randbedingungen

Die Quantisierung ist einfacher wenn man es mit abzählbar vielen Freiheitsgraden zu tun hat. Das ist Vektorfeld kontinuierlich und hat überabzählbar viele Freiheitsgrade. Wir verwenden daher periodische Randbedingungen

$$\vec{A}(x+L, y, z, t) = \vec{A}(x, y, z, t) \quad \text{usw.}$$

für ein endliches Volumen $V = L^3$, welches wir erst am Ende der Rechnungen unendlich gross werden lassen.

Fourier-Reihen

Felder, welche auf einem endlichen Hyperkubus leben lassen sich in Fourier-Reihe entwickeln. Die allgemeine Lösung für (5.3) lautet dann

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}} \left(A_{\lambda}(\vec{k}, t) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} + A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right) \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) . \quad (5.7)$$

Die $\vec{k}$ -Summe erstreckt sich über alle erlaubten $\vec{k}$ -Vektoren. Für sie gilt wegen der periodischen Randbedingungen

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3) , \quad n_i \in \mathbb{Z} .$$

Der Index λ geht von 1 bis 2 und gibt die Polarisation an. Der Faktor unter der Wurzel wird sich später als günstig erweisen und ist ansonsten bedeutungslos. Die Vektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind zwei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, die mit $\vec{k}$ ein orthogonales Dreibein bilden (transversale Eichung):

$$\vec{k} \cdot \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) = 0, \quad \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{u}_{\mu}(\vec{k}) = \delta_{\mu\lambda} .$$

Außerdem wählt man noch o.B.d.A. $\vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) = \vec{u}_{\lambda}(-\vec{k})$.

$$\square \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_{\lambda}(\vec{k}, t) = -c^2 \vec{k}^2 A_{\lambda}(\vec{k}, t)$$

Harmonische Oszillatoren

Wichtig ist nun, daß wegen (5.3) für jeden Fourier-Koeffizienten $A_\lambda(\vec{k}, t)$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_\lambda(\vec{k}, t) = -c^2 \vec{k}^2 A_\lambda(\vec{k}, t) \quad (5.8)$$

gilt, also eine Differentialgleichung für einen *harmonischen Oszillator*. Man sagt, die Normalmoden des Strahlungsfeldes verhalten sich wie harmonische Oszillatoren. Diese Tatsache wird später den Ausgangspunkt für die Lichtfeldquantisierung bilden.

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Um (5.8) zu erfüllen, setzen wir

$$A_\lambda(\vec{k}, t) = A_\lambda(\vec{k}) e^{-i\omega_{\vec{k}} t}, \quad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|.$$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (5.3) ist damit

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}}} \left(A_\lambda(\vec{k}) \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)}}{\sqrt{V}} + A_\lambda^*(\vec{k}) \frac{e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)}}{\sqrt{V}} \right) \vec{u}_\lambda(\vec{k}). \quad (5.9)$$

Die zeitunabhängigen Feldamplituden $A_\lambda(\vec{k})$ werden bei der Quantisierung dann zu Operatoren im Schrödinger-Bild werden.

Energie des Lichtfeldes

Unter Verwendung von (5.9) wollen wir die Gesamtenergie des Strahlungsfeldes nur durch die Fourier-Koeffizienten $A_\lambda(\vec{k})$ ausdrücken. Es ist mit (5.4) und $\varphi = 0$

$$E_{kl} = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3r = \frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{1}{c} c \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right) d^3r .$$

Wir berechnen die beiden Teile des Integrals getrennt.

Der $\partial \vec{A} / \partial t$ -Term zur Feldenergie

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi c^2} \int \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 d^3 r &= \frac{1}{8\pi c^2} \frac{2\pi \hbar c^2}{V} \int \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sum_{\lambda, \lambda'} \left[\left(-\frac{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}} \right) \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{u}_{\lambda'}(\vec{k}') \times \right. \\ &\quad \times \left(A_{\lambda}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \times \\ &\quad \left. \times \left(A_{\lambda'}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} - A_{\lambda'}^*(\vec{k}', t) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \right) \right] d^3 r \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hier kann man die Beziehungen

$$\frac{1}{V} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} d^3 r = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad \text{und} \quad \frac{1}{V} \int e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{r}} d^3 r = \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \quad (5.11)$$

ausnutzen. Außerdem ist

$$\sum_{\lambda, \lambda'} \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) \vec{u}_{\lambda'}(\vec{k}) = \sum_{\lambda}$$

wegen $\vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) \vec{u}_{\lambda'}(\vec{k}) = \delta_{\lambda, \lambda'}$. Damit wird (5.10) zu

$$\frac{1}{4} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(A_{\lambda}(\vec{k}, t) A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) + A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) A_{\lambda}(\vec{k}, t) - \left(A_{\lambda}(\vec{k}, t) A_{\lambda}(-\vec{k}, t) + A_{\lambda}^*(-\vec{k}, t) A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) \right) \right) .$$

Der $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ -Term zur Feldenergie

Er liefert bis auf ein Vorzeichen das gleiche Ergebnis wie der andere Term:

$$\frac{1}{8\pi} \int (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 d^3r = \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(A_{\lambda}(\vec{k}, t) A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) + A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) A_{\lambda}(\vec{k}, t) + \right. \\ \left. + \left(A_{\lambda}(\vec{k}, t) A_{\lambda}(-\vec{k}, t) + A_{\lambda}^*(-\vec{k}, t) A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) \right) \right)$$

Die letzten beiden Terme heben sich also jeweils weg und es wird schließlich

$$E_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(A_{\lambda}(\vec{k}) A_{\lambda}^*(\vec{k}) + A_{\lambda}^*(\vec{k}) A_{\lambda}(\vec{k}) \right) \quad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|. \quad (5.12)$$

Die Zeitabhängigkeit wurde hier schon weggelassen, da sie sowieso herausfällt. Natürlich sind A_{λ} und A_{λ}^* Zahlen, also könnte man die Klammer zusammenfassen. Allerdings wollen wir ja auf eine Quantisierung hinaus, also sollte auf die Reihenfolge der Größen, die später Operatoren werden sollen, genau geachtet werden.

5.1.3 Quantisierung des Lichtfeldes

Der klassische Ausdruck (5.12) für die elektromagnetischen Feldenergie stellt sich als Summe über harmonische Oszillatoren dar. Wir können also die entsprechende Quantisierungsvorschrift übernehmen.

Photonen sind Bosonen

Nun folgt der entscheidende Schritt zur Quantisierung. Wir nehmen in der klassischen Gesamtenergie (5.12) die Ersetzungen

$$\begin{aligned} A_{\lambda}(\vec{k}) &\longrightarrow a_{\lambda}(\vec{k}) \\ A_{\lambda}^*(\vec{k}) &\longrightarrow a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

vor, wobei die Kletter-Operatoren den bosonischen Vertauschungsrelationen

$$[a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (5.19)$$

genügen. Das Vektorpotential wird nun also zu einem *Operator*.

Zur Vereinfachung packen wir den Polarisationsindex λ ab jetzt stets mit in $\vec{k}$ hinein, so daß (5.19) nun lautet:

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

Hamiltonian

Der Hamilton-Operator für das elektromagnetische Feld schreibt sich dann mit (5.18) aus der klassischen Feldenergie (5.12) zu

$$H_{em} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) . \quad (5.20)$$

Nun ist die Analogie des elektromagnetischen Feldes zum harmonischen Oszillator komplett: Das Feld kann beschrieben werden als eine unendliche Zahl harmonischer Oszillatoren, die durch den Wellenvektor $\vec{k}$ unterschieden werden.

Operator für das Vektor-Potential

Das Vektorpotential wird mit den kanonischen Ersetzungen (5.18) zu einem hermiteschen Operator, der aus einer Linearkombination von Kletter-Operatoren besteht,

$$\vec{A}_{op}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} + a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad \omega_{\vec{k}} = c |\vec{k}| . \quad (5.21)$$

Sämtliche Eigenschaften des quantisierten Lichtfeldes lassen sich nun direkt aus dieser Darstellung ableiten.

$$\vec{A}_{op}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$$

Heisenbergsche Bewegungsgleichung

Die Heisenberg-Gleichung

$$i\hbar \frac{d\vec{A}_{op}}{dt} = [\vec{A}_{op}, H], \quad i\hbar \frac{d\vec{A}_{op}}{dt} - [\vec{A}_{op}, H] = 0 \quad (5.22)$$

für diesen Operator ist äquivalent zur Wellengleichung (5.3), d.h. mit

$$\square \vec{A}_{op}(\vec{r}, t) = 0, \quad \square e^{\pm i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} = 0,$$

welche ja für jede einzelnen Welle schon erfüllt ist.

Betrachte jeden einzelnen Term und beachte $[a^\dagger a, a] = -a$:

$$i\hbar(-i\omega_{\vec{k}})a_{\vec{k}} - \hbar\omega[a_{\vec{k}}, N_{\vec{k}}] = \hbar\omega_{\vec{k}}a_{\vec{k}} - \hbar\omega_{\vec{k}}a_{\vec{k}} = 0.$$

Damit ist auch die Bewegungsgleichung erfüllt.

$$\vec{A}_{op}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$$

Zeitabhängigkeit

Die Kletter-Operatoren in (5.21) sind vollkommen zeitunabhängig, d.h. im Schrödinger-Bild. Man kann die Zeitabhängigkeit auch wieder auf sie übertragen, via

$$a_{\vec{k}}(t) = e^{iHt/\hbar} a_{\vec{k}} e^{-iHt/\hbar} .$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt} a_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{i\hbar} e^{iHt/\hbar} [a_{\vec{k}}, H] e^{-iHt/\hbar} \stackrel{(5.19)}{=} \frac{1}{i\hbar} e^{iHt/\hbar} (\hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}) e^{-iHt/\hbar} = -i\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}(t) .$$

Daraus folgt

$$a_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}}$$

und

$$a_{\vec{k}}^\dagger(t) = e^{i\omega_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}}^\dagger .$$

was natürlich mit (5.21) konsistent ist.

Feldoperatoren

Die Operatoren für das elektrische und magnetische Feld sind dann laut (5.4) in der Coulombbeziehung $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, gleich

$$\vec{E}_{op}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega_{\vec{k}}}{V}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad (5.23)$$

$$\vec{B}_{op}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}} \vec{k} \times \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad (5.24)$$

Die Buchstaben “h.c.” stehen für das hermitesch Konjugierte des ersten Ausdruckes in der Klammer, also in diesem Fall für $a_{\vec{k}}^\dagger \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t))$.

Impuls

Es sei noch der Ausdruck für den Impuls des quantisierten Lichtfeldes erwähnt. Klassisch ist die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes durch

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) d^3r \quad (5.25)$$

5.23 & 5.24 $\rightarrow$

$$\vec{P}_{op} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} N_{\vec{k}}.$$

Der Impuls eines Einzelnen Photons ist $\hbar \vec{k}$.

Zusammenfassung

Es lassen sich jetzt folgende Regeln für die quantenmechanische Beschreibung des Lichtfeldes angeben:

- Vakuum

Es existiert ein Vakuum-Zustand $|0\rangle$ mit

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k} \quad \text{und} \quad \langle 0|0\rangle = 1 .$$

- Photonen

Ein Photon in einem Zustand mit festem Impuls $\hbar\vec{k}$ wird beschrieben durch

$$a_{\vec{k}}^{\dagger}|0\rangle .$$

- Allg. Zustand

Ein allgemeiner Photonenzustand mit $n_{\vec{k}_i}$ Photonen pro Impuls $\hbar\vec{k}_i$ (man sagt auch “in der Mode $\vec{k}_i$ ”) wird beschrieben durch

$$\frac{(a_{\vec{k}_1}^{\dagger})^{n_{\vec{k}_1}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_1}!}} \frac{(a_{\vec{k}_2}^{\dagger})^{n_{\vec{k}_2}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_2}!}} \cdots |0\rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(a_{\vec{k}_i}^{\dagger})^{n_{\vec{k}_i}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_i}!}} |0\rangle . \quad (5.26)$$

Dafür schreibt man auch kurz

$$|n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle \quad \text{oder} \quad |\{n_{\vec{k}}\}\rangle . \quad (5.27)$$

- Besetzungszahloperator

Der Besetzungszahloperator $N_{\vec{k}_i}$ hat die Eigenschaft

$$N_{\vec{k}_i} |\dots, n_{\vec{k}_i}, \dots\rangle = n_{\vec{k}_i} |\dots, n_{\vec{k}_i}, \dots\rangle .$$

Der Hamiltonian (5.20) separiert in Einzelbeiträge zu den verschiedenen Moden. Deswegen kann der allgemeine Zustand (5.27) auch als direktes Produkt

$$|n_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |n_{\vec{k}_2}\rangle \otimes \dots = |n_{\vec{k}_1}\rangle |n_{\vec{k}_2}\rangle \dots$$

geschrieben werden. Für jeweils eine Mode $\vec{k}$ bilden dann die $\{|n_{\vec{k}}\rangle\} \forall n$ ein VONS. Falls einmal nur eine einzige Mode interessiert, schreibt man für den betrachteten Zustand oft auch nur $|n_{\vec{k}}\rangle$.

- Photonen sind Bosonen

Da die Besetzungszahlen $n_{\vec{k}}$ beliebige Zahlen aus $\mathcal{N}_0$ sein dürfen, hat man es mit *Bosonen* zu tun: Ein Energieniveau (hier eine Mode) kann beliebig stark bevölkert sein. Daher gibt es kohärente Zustände und Laserlicht, was wir im Abschnitt 5.2.1 besprechen werden.

Nullpunktsenergie

Bildet man den Erwartungswert des Hamiltonian (5.20) mit dem Vakuum-Zustand, so zeigt sich ein überraschendes Ergebnis:

$$\langle 0 | H_{em} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \rightarrow \infty . \quad (5.28)$$

Die Energie des Vakuums ist offenbar divergent!

- I.A. betrachten wir lediglich Energie-Differenzen und eine unendlich grosse Energie des Vakuums spielt daher keine Rolle.
- Die Vakuumsenergie hängt von den Randbedingungen ab und verändert sich in beschränkten Geometrien, wie z.B. zwischen zwei Leiterplatten, was man experimentell mittels des *Kasimir-Effektes* nachweisen kann.

Eigenschaften des Strahlungsfeldes

Kohärente Zustände

Verschwindende Felder

Nach (5.23) hat der Operator des elektrischen Feldes die vollständige Darstellung

$$\vec{E}_{op}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{op}}{\partial t} = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}}. \quad (5.29)$$

Im folgenden sind wir nur an einer bestimmten Mode $\vec{k}$ des Feldes interessiert. Für diese Mode lautet (5.29) einfach

$$\vec{E}_{op}\vec{k} = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}}. \quad (5.30)$$

Der Erwartungswert dieses Operators in einem Zustand $|n_{\vec{k}}\rangle$ mit fester Anzahl $n_{\vec{k}}$ von Photonen ist dann

$$\langle n_{\vec{k}} | \vec{E}_{op}\vec{k} | n_{\vec{k}} \rangle = 0,$$

da $\vec{E}_{op}\vec{k}$ linear in Erzeugern und Vernichtern ist und die $\{|n_{\vec{k}}\rangle\} \forall n$ ein VONS bilden.

Nicht-klassische Felder

Der Erwartungswert des elektromagnetischen Feldes in Zuständen mit fester Photonenzahl verschwindet.

Zustände mit festen Photonenzahlen sind daher nicht klassisch.

Endliche Energiedichte

Andererseits gilt für die Energiedichte im selben Zustand

$$\langle n_{\vec{k}} | \frac{1}{8\pi} (\vec{E}_{op}^2 + \vec{B}_{op}^2) | n_{\vec{k}} \rangle = \langle n_{\vec{k}} | \frac{1}{4\pi} \vec{E}_{op}^2 | n_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{V} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) ,$$

wie wir es erwartet hätten. Das Ganze läßt vermuten, daß es mit der Photonenzahl etwas Besonderes auf sich hat.

Wir werden nun zeigen, daß der Besetzungszahloperator nicht mit dem *Phasen-Operator* kommutiert. In einem Eigenzustand von $N_{\vec{k}}$ ist die Phase des Feldes vollkommen unbestimmt und damit verschwinden die klassischen Erwartungswerte. Um den Übergang zur klassischen Feldtheorie korrekt zu beschreiben muss man daher kohärente Überlagerungen von Zuständen mit unterschiedlichen Photonenzahlen betrachten.

Phasen-Operator

Für den Rest dieses Abschnittes behandeln wir eine einzige Mode des Strahlungsfeldes, also werden wir die $\vec{k}$ -Abhängigkeit aller Operatoren weglassen.

Zunächst definieren den Phasen-Operatoren ϕ mittels

$$a = \sqrt{N+1} e^{i\phi}, \quad a^\dagger = e^{-i\phi^\dagger} \sqrt{N+1}, \quad N = a^\dagger a, \quad (5.31)$$

wir zerlegen also die Erzeuger und Vernichter formal in Amplitude und Phase. Diese Vorgehensweise lässt sich allg. bei Bosonen durchführen. Wie wir sehen werden ist der Phasen-Operatoren “fast selbstadjungiert”, $\phi \simeq \phi^\dagger$, nur beim Vakuumzustand $|0\rangle$ wird man aufpassen müssen.

Wir müssen nun zunächst zeigen, dass die Darstellung (5.31) unitär ist. Die Aufgabe ist also die, diejenigen Vertauschungrelationen von $N = a^\dagger a$ und ϕ zu finden, so dass

$$[N, \phi] = ? \quad \Longleftrightarrow \quad [a, a^\dagger] = 1 .$$

Eigenschaften des Phasen-Operators

Man kann Gl. (5.31), unter Beachtung der Reihenfolge, invertieren:

$$\left(\sqrt{N+1}\right)^{-1} a = e^{i\phi} \quad a^\dagger \left(\sqrt{N+1}\right)^{-1} = e^{-i\phi^\dagger} . \quad (5.32)$$

Erinnerung:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\begin{aligned} \rightarrow e^{i\phi}|n\rangle &= \left(\sqrt{N+1}\right)^{-1} a|n\rangle \\ &= (1 - \delta_{n,0}) \left(\sqrt{N+1}\right)^{-1} \sqrt{n}|n-1\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle & ; \quad n > 0 \\ 0 & ; \quad n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} e^{-i\phi^\dagger}|n\rangle &= a^\dagger \left(\sqrt{N+1}\right)^{-1} |n\rangle = (n+1)^{-1/2} a^\dagger |n\rangle \\ &= |n+1\rangle . \end{aligned} \quad (5.34)$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt die Matrixdarstellung der Phasen-Operatoren:

$$\begin{aligned} \langle n|e^{i\phi}|m\rangle &= \delta_{n,m-1} \\ \langle n|e^{-i\phi^\dagger}|m\rangle &= \delta_{n-1,m} \end{aligned}$$

und somit

$$\langle m|e^{i\phi}e^{-i\phi^\dagger}|n\rangle = \delta_{m,n}, \quad \langle m|e^{-i\phi^\dagger}e^{i\phi}|n\rangle = (1 - \delta_{n,0}) \delta_{m,n} . \quad (5.35)$$

Wenn ϕ selbstadjungiert wäre, dann würden $e^{\pm i\phi}$ vertauschen. Gleichung (5.35) zeigt das dieses fast der Fall ist, bis auf $n = 0$, also insbesondere für grosse Teilchenzahlen.

Observable Phasen

Die Operatoren sind daher nicht hermitesch, denn $(e^{i\phi})^\dagger = e^{-i\phi^\dagger}$ aufgrund der obigen Beziehungen, und daher in dieser Form keine physikalischen Observablen. Man kann jedoch hermitesche Operatoren aus den Phasen-Operatoren kombinieren:

$$\sin \phi \equiv \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi^\dagger}}{2i}, \quad \cos \phi \equiv \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi^\dagger}}{2}. \quad (5.36)$$

Falls ϕ selbstadjungiert wäre, entspräche diese Definition jeweils dem Imaginär- sowie dem Realteil. Für einen allgemeinen Operator ϕ definiert man durch (5.36) neue Operatoren $\sin \phi$ und $\cos \phi$.

Kommutationsrelationen

Im folgenden machen wir die Approximation $\phi \simeq \phi^\dagger$, welche bis auf das Vakuum exakt ist. Dann folgt aus

$$\begin{aligned} 1 &= aa^\dagger - a^\dagger a = \sqrt{N+1} e^{i\phi} e^{-i\phi} \sqrt{N+1} - e^{-i\phi} (N+1) e^{i\phi} \\ &= N - e^{-i\phi} N e^{i\phi} = N - e^{-i\phi} \left(e^{i\phi} N + [N, e^{i\phi}] \right) \\ &= N - \left([e^{-i\phi}, N] + N e^{-i\phi} \right) e^{i\phi} \end{aligned}$$

die Kommutationsrelationen

$$[N, e^{i\phi}] = -e^{i\phi}, \quad [N, e^{-i\phi}] = e^{-i\phi}. \quad (5.37)$$

$$\left[N, e^{i\phi} \right] = -e^{i\phi}, \quad \left[N, e^{-i\phi} \right] = e^{-i\phi}$$

Es gelten daher die Vertauschungsrelationen

$$\left[N, \cos \phi \right] = i \sin \phi \quad \left[N, \sin \phi \right] = i \cos \phi \quad \boxed{\left[N, \phi \right] = i}, \quad (5.38)$$

die ausdrücken, daß es prinzipiell nicht möglich ist, Phase und Teilchenzahl gleichzeitig scharf zu bestimmen, die beiden Messungen sind also nicht verträglich.

Unschärferelation

Die Phase ϕ und der Teilchenzahloperator $N = a^\dagger a$ sind für Bosonen kanonische konjugierte Variablen.

Man erinnere sich dabei an die Heisenbergsche Unschärfrelation

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle | = \frac{1}{2}, \quad [A, B] = i,$$

wobei letztere Beziehung für kanonisch konjugierte Operatoren A und B gilt.

Exkurs: Supraleitung

Dieses Ergebnis ist für die Supraleitung essentiell. Supraleitung kommt durch Singulett-Paarung von Elektronen zustande und in einer sehr groben Näherung kann man diese Singulett-Paare als Bosonen betrachten, denn nach dem Spin-Statistik-Theorem sind Teilchen mit ganzzahligen internem Spin Bosonen.

Das supraleitenden Kondensat ist durch eine feste Phase charakterisiert, man spricht auch von einer spontanen Brechung der globalen Eichinvarianz.

Wenn die Phase fest ist, dann kann es nach (5.38) die Teilchenzahl nicht sein. Daher ist die BCS-Wellenfunktion

$$|\psi_{BCS}\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \underbrace{c_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}}_{\text{Elektronenpaar}} \right) |0\rangle$$

eine kohärente Überlagerung von Zuständen mit verschiedenen Anzahl von Singulett-Paaren!

Schwankungsquadrate

In einem reinen Zustand $|n\rangle$ mit fester Photonenzahl verschwindet natürlich die Schwankung des Besetzungszahloperators:

$$\Delta N = \sqrt{\langle n|N^2|n\rangle - \langle n|N|n\rangle^2} = 0$$

Dagegen hat $\cos\phi$ eine endliche Schwankungsbreite. Es gilt $\langle \cos\phi \rangle = 0$ und

$$\langle \cos^2\phi \rangle = \frac{1}{4} \left\langle e^{i\phi} e^{-i\phi^\dagger} + e^{-i\phi^\dagger} e^{i\phi} \right\rangle = \frac{2 - \delta_{n,0}}{4}$$

in einem reinen Zustand $|n\rangle$, und somit für $\Delta \cos\phi = \Delta \sin\phi$

$$\Delta \cos\phi = \sqrt{\langle \cos^2\phi \rangle - \langle \cos\phi \rangle^2} = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & ; \quad n > 0 \\ \frac{1}{2} & ; \quad n = 0 \end{cases} .$$

Kohärente Zustände

Um einen Übergang zur makroskopischen Elektrodynamik zu erreichen, kann man Zustände mit verschiedenen Teilchenzahlen linear kombinieren. Man definiert einen kohärenten Zustand $|c\rangle$ (auch Glauber-Zustände genannt, Nobelpreis 2005) via

$$|c\rangle \equiv e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{mit} \quad c \in \mathcal{C}, \quad c = |c|e^{i\theta}. \quad (5.39)$$

Wenn man für den Zustand $|n\rangle$ die Darstellung (5.26) benutzt, kann man das auch kompakter schreiben:

$$|c\rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \exp\left(-|c|^2/2 + ca^\dagger\right) |0\rangle$$

Ein Glauber-Zustand $|c\rangle$ enthält nur die $\{|n\rangle\}$ einer einzigen Mode, also ist $\vec{k}$ immer noch scharf festgelegt.

Eigenschaften des Glauberzustandes

Es gilt zunächst allgemein

$$\begin{aligned} a \left(a^\dagger \right)^n |0\rangle &= \left(a a^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a \right) \left(a^\dagger \right)^{n-1} |0\rangle \\ &= \left(a^\dagger \right)^{n-1} |0\rangle + a^\dagger a \left(a^\dagger \right)^{n-1} |0\rangle = \dots \\ &= n \left(a^\dagger \right)^{n-1} |0\rangle, \end{aligned}$$

woraus übrigens auch $N(a^\dagger)^n |0\rangle = n(a^\dagger)^n |0\rangle$ folgt. Damit gilt

$$a|c\rangle = c e^{-|c|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \frac{(a^\dagger)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |0\rangle = c|c\rangle.$$

Der Glauberzustand ist also ein Eigenzustand des Vernichters. Wir fassen die Beziehungen

$a c\rangle = c c\rangle$

$$\langle c|a|c\rangle = c, \quad \langle c|a^\dagger|c\rangle = c^*, \quad \langle c|c\rangle = 1. \quad (5.40)$$

zusammen. Wir bemerken, dass die kohärenten Zustände keine orthogonale Basis bilden, denn i.A. $\langle c|c'\rangle \neq 0$.

$$\vec{E}_{op}\vec{k} = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad \text{und} \quad a|c\rangle = c|c\rangle$$

Elektrisches Feld eines kohärenten Zustandes

Der Erwartungswert

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \langle c | \vec{E}_{op} | c \rangle &= i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \left(c e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \text{c.c.} \right) \vec{u} = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} |c| \left(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\theta)} - \text{c.c.} \right) \vec{u} = \\ &= -2\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} |c| \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \theta) \vec{u}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

des elektrischen Feldes in einem kohärenten Zustand entspricht der klassischen Erwartung.

Es besteht also eine Eins-zu-Eins Beziehung zwischen den ebenen Wellen der klassischen Elektrodynamik und kohärenten Zuständen $|c\rangle$, da mittels $c = |c|e^{i\theta}$ sowohl die Amplitude wie auch die Phase der ebenen Welle mittels (5.41) bestimmt werden können.

Photonen-Anzahl-Fluktuationen

As den Beziehungen (5.40) und $N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger a a$ folgt

$$\langle c|N|c\rangle = |c|^2 \quad \text{und} \quad \langle c|N^2|c\rangle = |c|^4 + |c|^2 ,$$

so daß

$$\Delta N = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2} = |c| . \quad (5.42)$$

Die relative Schwankung der Photonenzahl ist damit

$$\frac{\Delta N}{\langle N \rangle} = \frac{1}{|c|} = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}} . \quad (5.43)$$

Je größer also die Teilchenzahl, desto geringer ist ihre relative Schwankung. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung genau m Photonen zu finden, ist

$$|\langle m|c\rangle|^2 = \left| \frac{c^m}{\sqrt{m!}} e^{-|c|^2/2} \right|^2 = e^{-|c|^2} \frac{|c|^{2m}}{m!} ,$$

sie gehorcht also einer Poisson-Verteilung.

Schwankungen der Phase

Wir gehen von der Unschärferelation

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

für zwei allgemeine hermitesche Operatoren A und B aus. Mit (5.38) für die Vertauschungsrelation $[N, \sin \phi] = i \cos \phi$ erhalten wir für die Schwankungen $\Delta \sin \phi$ von $\sin \phi$

$$\Delta N \Delta \sin \phi \geq \frac{1}{2} \left| \langle \cos \phi \rangle \right|$$

und mit (5.42) für $\Delta N = |c|$ und $\Delta \sin \phi = \Delta \cos \phi$ finden wir

$$\frac{\Delta \cos \phi}{|\langle \cos \phi \rangle|} \geq \frac{1}{2|c|}. \quad (5.44)$$

Die Abschätzung ergibt streng genommen nur eine untere Schranke für die relative Schwankungen der Phase, erspart uns aber eine aufwendige Rechnung. Im Allgemeinen werden sind die wirklichen Schwankungen von zwei Operatoren von der gleichen Grössenordnung wie durch die jeweiligen Unschärferelation angegeben.

Die relative Phasenschwanken verschwinden also im Grenzfall grosser Photonenzahlen $\langle N \rangle = |c|^2$, genau wie die relativen Schwankungen der Photonenzahlen selber, Gleichung (5.43).

Klassischer Grenzfall

Das Lichtfeld ist in Phase und Teilchenzahl um so besser definiert ist, je mehr Photonen es enthält. Im Grenzfall großer Photonenzahlen entspricht der klassischen Beschreibung.

Das ist auch intuitiv klar. Bei wenigen Photonen treten deren quantenmechanischen Eigenschaften deutlich zu Tage, und mitteln sich im Grenzfall hoher Photonenzahlen weg.

Als nächstes:

Wechselwirkung von Strahlung mit Materie