

# Quantenmechanik II

Quantisierung des klassischen Strahlungsfeldes (3)

# Licht-Materie-Wechselwirkung in zweiter Quantisierung

Wir wollen nun, in Verbindung mit dem ersten Teil der Vorlesung, die Wechselwirkung von Licht mit Materie untersuchen. Die Darstellung der Materie-Zustände in zweiter Quantisierung wird es uns dabei erlauben, das Konzept der *Feynman Diagramme* einzuführen, welches sowohl in der Vielteilchentheorie wie auch in der Theorie der Elementarteilchen eine zentrale Rolle spielt.

Da wir jetzt alles in zweiter Quantisierung aufschreiben werden, verzichten wir darauf Operatoren durch Fettdruck auszuzeichnen.

## Licht-Materie Hamiltonian in zweiter Quantisierung

Wir beschreiben die Wechselwirkung von Photonen und Elektronen komplett in zweiter Quantisierung. Der Hamiltonian lautet

$$H = H_{mat} + H_I + H_{em} ,$$

wobei  $H_{mat}$  die Anteile jeweils die Elektronen alleine,  $H_I$  die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld (5.46), und  $H_{em}$  das elektromagnetische Feld alleine beschreiben:

$$H = H_{mat} + H_I + H_{em}$$

$$H_{mat} = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r})$$

$$H_I = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}) \left( -\frac{e}{mc} \vec{A}_{op} \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{2mc^2} (\vec{A}_{op})^2 \right) \psi(\vec{r})$$

$$H_{em} = \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_{\vec{q}} \left( a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} + \frac{1}{2} \right)$$

Dabei ist

$$\vec{A}_{op} = \sum_{\vec{q}} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_{\vec{q}}}} \left( a_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \right) \vec{u}_{\vec{q}}$$

- Die Operatoren  $\psi^\dagger(\vec{x})$  und  $\psi(\vec{x})$  sind die Erzeugnis- und Vernichtungsoperatoren für Elektronen am Orte  $\vec{x}$ .
- Die Summation über den Polarisationsindex ist in die  $\vec{q}$ -Summation gesteckt worden.
- Die Kletter-Operatoren  $a_{\vec{q}}^\dagger$  und  $a_{\vec{q}}$  für das Lichtfeld sind im Heisenberg-Bild, also zeitabhängig.
- Der gesamte Hamiltonian wirkt in einem Produkt-Raum aus den beiden Fock-Räumen für Elektronen und Photonen:

## Feldoperatoren

Wir wollen zunächst **freie Elektronen** untersuchen, es ist also  $V(\vec{r}) = 0$ . Als vollständiges Orthonormalsystem für die Feldoperatoren der Elektronen bieten sich dann ebene Wellen an,

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} c_{\vec{k}}, \quad \psi_{\vec{k}}^\dagger(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} c_{\vec{k}}^\dagger,$$

mit dem (Anti-) Kommutationrelationen

$$\begin{aligned} [\psi^\dagger(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})]_+ &= 0, & [\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})]_+ &= 0, & [\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})]_+ &= \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ [c_{\vec{k}}^\dagger, c_{\vec{p}}^\dagger]_+ &= 0, & [c_{\vec{k}}, c_{\vec{p}}]_+ &= 0, & [c_{\vec{k}}, c_{\vec{p}}^\dagger]_+ &= \delta_{\vec{k}, \vec{p}}. \end{aligned}$$

## Dispersionsrelation

Damit können wir  $H_{mat}$  vollständig in Kletter-Operatoren ausdrücken:

$$H_{mat} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{V} \int d^3r \underbrace{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}}_{= \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \hbar^2 \vec{k}^2 / 2m} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}'},$$

wobei  $\epsilon_k = \hbar^2 \vec{k}^2 / 2m$  als Dispersionsrelation bezeichnet wird, also

$$H_{mat} = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \varepsilon_k n_{\vec{k}}, \quad (6.14)$$

wenn wir den Besetzungszahloperator  $n_{\vec{k}}$  verwenden.

Die Interpretation von (6.14) ist sehr einfach: Die Energie eines Vielteilchenzustandes ist (ohne Wechselwirkung) einfach die Summe der besetzten Einteilchenniveaus. Man beachte, dass diese einfache Darstellung zusammenbricht, sobald man die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
H'_I &= \frac{1}{V} \int d^3r \sum_{\vec{k}_1} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} c_{\vec{k}_1}^\dagger \left( -\frac{e\hbar}{imc} \sum_{\vec{q}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} \left( a_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \right) \vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{\nabla} \right) \sum_{\vec{k}_2} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} c_{\vec{k}_2} \\
&= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}} + M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{q}) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}}^\dagger \right), \tag{6.15}
\end{aligned}$$

wobei  $\vec{q}$  wieder den Polarisationsindex beinhaltet. Es ist

$$\begin{aligned}
M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}) &= \frac{1}{V} \int e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \left( -\frac{e\hbar}{imc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \vec{u}_{\vec{q}} \cdot (i\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \right) d^3r \\
&= -\frac{e\hbar}{Vmc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} (\vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{k}_2) \int e^{i(\vec{q} + \vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}} d^3r \\
&= -\frac{e\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} (\vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{k}_2) \delta_{\vec{k}_1, \vec{q} + \vec{k}_2}. \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck (6.16) ist nichts weiter als die Impulserhaltung. Der Anteil  $H'_I$  beschreibt durch seine zwei Terme in (6.15) zwei Arten von Prozessen:

- Der erste Term vernichtet ein Photon  $\vec{q}$  und ein Elektron  $\vec{k}_2$  und erzeugt ein Elektron  $\vec{k}_1$ , dabei ist der totale Impuls erhalten:  $\vec{k}_1 = \vec{q} + \vec{k}_2$ .
- Der zweite Term erzeugt ein Photon  $\vec{q}$  und ein Elektron  $\vec{k}_1$  und vernichtet ein Elektron  $\vec{k}_2$ . Der Gesamtimpuls ist wegen  $\vec{k}_2 = \vec{q} + \vec{k}_1$  erhalten.

## Vereinfachung

Man kann leicht zeigen, daß der zweite Term in (6.15) das hermitesch Konjugierte des ersten ist. Im ersten Term steht nämlich

$$\vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{k}_2 = \vec{u}_{\vec{q}} \cdot (\vec{k}_1 - \vec{q}) = \vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{k}_1 ,$$

also kann man beim Übergang zum zweiten Term statt  $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$  auch den Austausch  $\vec{k}_1 \leftrightarrow \vec{k}_2$  vornehmen. Dann ist das hermitesch Konjugierte des zweiten Terms gleich

$$\left( \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} M_1(\vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{q}) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}}^\dagger \right)^\dagger = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} M_1(\vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{q}) c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_1} a_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}} ,$$

und das ist gleich dem ersten Term. Der paramagnetische Anteil  $H'_I$  der Licht-Materie-Wechselwirkung schreibt sich also einfach als

$$H'_I = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}} + \text{h.c.} \right) . \quad (6.17)$$

## Feynman-Diagramme

Die beiden Prozesse, die  $H'_I$  beschreibt, können durch einfache Diagramme visualisiert werden. Abb. 6.1 links zeigt den ersten Prozeß, die Vernichtung eines Photons  $\vec{q}$  unter Streuung eines Elektrons  $\vec{k}_2$  nach  $\vec{k}_1$ . Das rechte Diagramm stellt den dazu hermitesch konjugierten Prozeß dar, die Erzeugung eines Photons unter Streuung eines Elektrons.

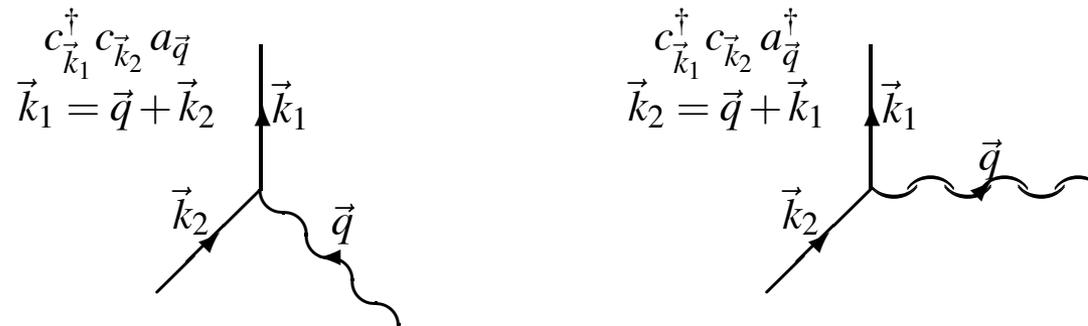
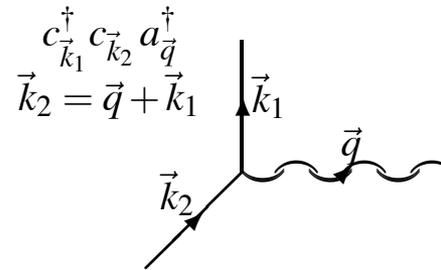
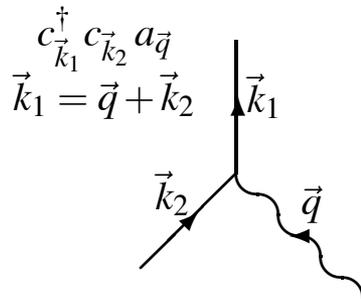


Abbildung 6.1: Prozesse erster Ordnung Störungsrechnung in  $H'_I$ . Der rechte Prozeß ist der hermitesch Konjugierte des linken.

### Feynman-Diagramme

Feynman-Diagramme sind die graphische Darstellung störungstheoretischer Prozesse. Dabei entsprechen die Linien den beteiligten ein- und ausgehenden Teilchen und die Vertizes den Matrixelementen der Wechselwirkung.



Feynman-Diagramme dienen nicht nur der Veranschaulichung. In der Vielteilchentheorie und in der Theorie der Elementarteilchen steht jedes Feynman-Diagramm für einen präzisen mathematischen störungstheoretischen Ausdruck.

### Impulserhaltung an den Vertices

Ein Punkt, an dem sich verschiedene Teilchenlinien treffen, heißt *Vertex*. Das Kronecker-Delta in  $M_1$  verlangt, daß an einem Vertex der Gesamtimpuls der vernichteten gleich dem Gesamtimpuls der erzeugten Teilchen ist.

## Diamagnetischer Störterm

Der Anteil  $H_I''$  im Hamiltonian enthält vier Terme, die aus dem Produkt  $\vec{A}^2$  kommen:

$$\begin{aligned}
 H_I'' &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \left( M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_2} + \right. \\
 &\quad + M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{q}_1, \vec{q}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1}^\dagger a_{\vec{q}_2} + \\
 &\quad + M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}_1, -\vec{q}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_2}^\dagger + \\
 &\quad \left. + M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{q}_1, -\vec{q}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1}^\dagger a_{\vec{q}_2}^\dagger \right) = \tag{6.18} \\
 &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \left( M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_2} + M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{q}_1, \vec{q}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1}^\dagger a_{\vec{q}_2} + \text{h.c.} \right)
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
 M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2) &= \frac{2\pi\hbar c^2}{V} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{q}_1} \omega_{\vec{q}_2}}} \frac{1}{V} \frac{e^2}{2mc^2} \int e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \cdot \vec{r}} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} (\vec{u}_{\vec{q}_1} \cdot \vec{u}_{\vec{q}_2}) d^3r \\
 &= \frac{2\pi\hbar c^2}{V} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{q}_1} \omega_{\vec{q}_2}}} \frac{e^2}{2mc^2} (\vec{u}_{\vec{q}_1} \cdot \vec{u}_{\vec{q}_2}) \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 + \vec{q}_1 + \vec{q}_2} . \tag{6.19}
 \end{aligned}$$

Die vier Terme in (6.18) beschreiben Vertices, an denen jeweils zwei Elektronen und zwei Photonen beteiligt sind. Abb. 6.2 zeigt die zugehörigen Feynman-Graphen. Die Größen  $M_1$  und  $M_2$  legen jeweils fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit die zugehörigen Prozesse auftreten können.

$$H_I'' = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \left( M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_2} + M_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{q}_1, \vec{q}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1}^\dagger a_{\vec{q}_2} + \text{h.c.} \right)$$

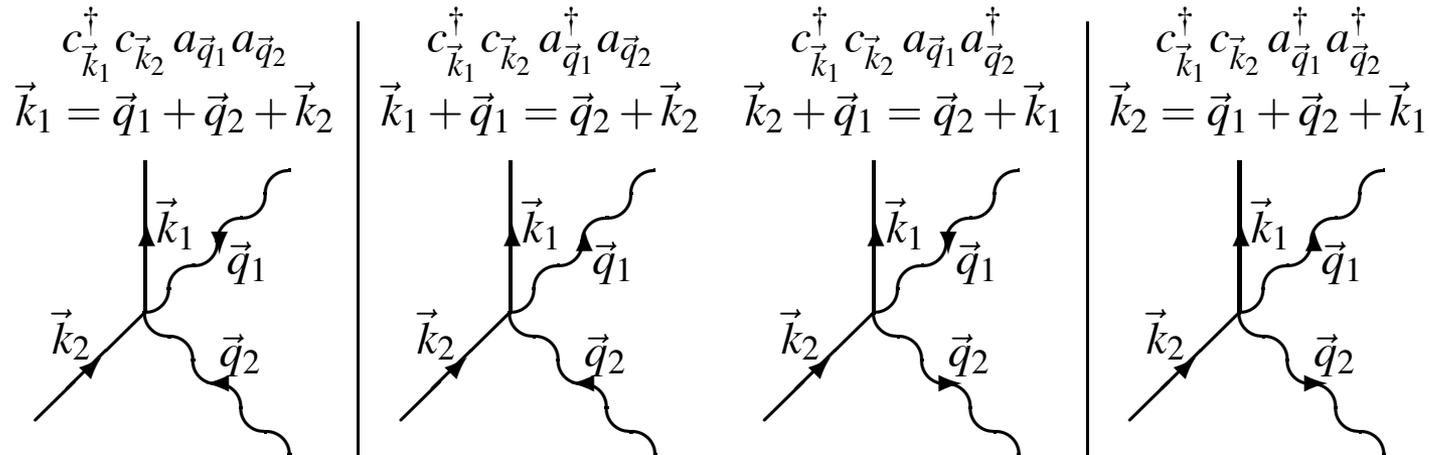


Abbildung 6.2: Prozesse erster Ordnung Störungsrechnung in  $H_I''$ . Die mittleren beiden Graphen beschreiben Beiträge zur Compton-Streuung. Die rechten beiden Diagramme sind die hermitesch Konjugierten der linken.

### Compton Streuung

Die mittleren beiden Graphen in der Abbildung zeigen die Streuung eines Photons an einem (freien) Elektron, also die *Compton-Streuung* (“ein Photon” ist es ja eigentlich nicht — es wird ein Photon vernichtet und ein anderes erzeugt, zumindest kann man es sich so veranschaulichen). Die anderen beiden Diagramme beschreiben Emissions- und Absorptionsprozesse mit zwei Photonen. An einem Vertex, der durch  $H_I''$  erzeugt wird, sind immer zwei Photonenlinien beteiligt.

# Nichtrelativistische Bremsstrahlung

Im folgenden untersuchen wir die Streuung eines Elektrons an einem Potential, z. B. einem feststehenden (weil im Vergleich zum Elektron schweren) Kern. Das geladene Teilchen wird dabei beschleunigt und strahlt Energie in Form von Photonen ab. Dieser Effekt ist als *Bremsstrahlung* bekannt, er wird in jeder Zahnarztpraxis benutzt um geeignete Strahlung für Röntgenaufnahmen zu produzieren. Es soll  $v/c \ll 1$ , also der nichtrelativistische Grenzfall gelten.

## Störterme

Wir interessieren uns nur für die Emission eines einzigen Photons, also ist  $H'_I$  der Wechselwirkungsterm. Außerdem soll auch das Potential  $V_K(\vec{r})$  eines Kerns aus dem Target als Störung behandelt werden. Der gesamte Störoperator lautet somit

$$V_0 = H'_I + V_K(\vec{r}) .$$

Wir bemerken, dass  $H''_I$  hier nicht vorkommt, da der diamagnetische Term in niedrigster Ordnung die Rutherford-Streuung beschreibt. In zweiter Quantisierung haben wir

$$H'_I = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}} + \text{h.c.} \right) \quad (6.20)$$

und

$$V_K = \int d^3r \psi_{\vec{r}}^\dagger V_K(\vec{r}) \psi_{\vec{r}} \quad \text{mit} \quad \psi_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} c_{\vec{k}} .$$

## Keine Impulserhaltung

Die explizite Form des Störpotentials ist

$$\text{mit} \quad \tilde{V}_K(\vec{k}) = \int V_K(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r .$$

$$V_K = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \int d^3r e^{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\cdot\vec{r}} V_K c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \tilde{V}_K(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2}$$

Das Potential  $V_K$  ist reell, also ist die Fourier-Transformierte  $\tilde{V}_K$  hermite-symmetrisch, d. h.  $\tilde{V}_K(-\vec{k}) = \tilde{V}_K^*(\vec{k})$ .

Wir beachten, dass der Gesamtimpuls nicht erhalten ist, denn der Hamiltonian ist nicht translationsinvariant. Bei der Streuung an  $V_K$  kann Impuls an das Gitter abgegeben werden.

## Goldene Regel

Mit dem Störoperator  $V_0$  sollen nun Übergänge induziert werden. Fermis goldene Regel für die Übergangsrates lautet

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f) |M_{if}|^2 \quad (6.21)$$

mit

$$M_{if} = M_{if}^{(1)} + M_{if}^{(2)} .$$

Die Energien  $E_i$  und  $E_f$  bedeuten die Gesamtenergien von Elektronen und Strahlungsfeld vor und nach dem Übergang. Anfangs- und Endzustand sind

$$|i\rangle = c_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle : \text{Kein Photon, ein Elektron } \hbar\vec{k}. \quad E_i = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \quad (6.22)$$

$$|f\rangle = c_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger |0\rangle : \text{Ein Photon } \hbar\vec{q}, \text{ ein Elektron } \hbar\vec{k}'. \quad E_f = \frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m} + \hbar c q \quad (6.23)$$

Dabei ist  $q = |\vec{q}|$ .

# Differentieller Streuquerschnitt

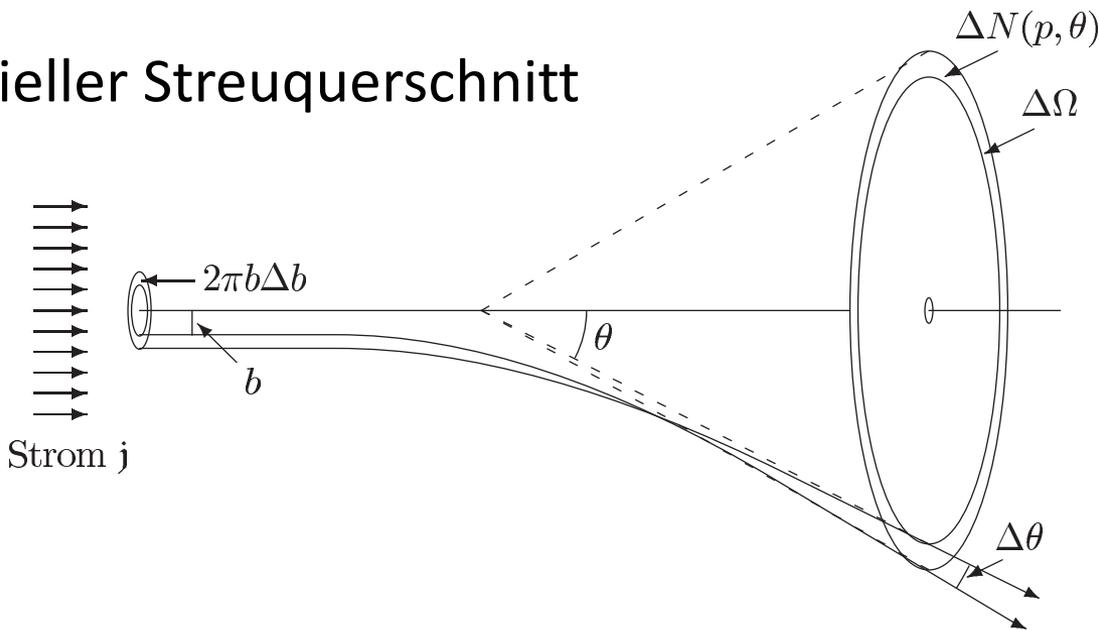


Abbildung 6.3: Zur Geometrie der elastischen Streuung. Die Fläche  $\Delta\sigma$  des einfallenden Strahles ist  $\Delta\sigma = 2\pi\Delta b$  und der ausfallende Raumwinkel  $\Delta\Omega$ .

Angenommen, ein Teilchenstrom der Dichte  $j_i$  (Teilchenzahl pro Fläche und Zeit,  $i$  für ‘initial’) trifft auf ein Streupotential. Dann wird ein Detektor, der im Raumwinkel-Element  $d\Omega$  und im Bereich der Impulsbeträge zwischen  $k'$  und  $k' + dk'$  die gestreuten Teilchen zählt, eine gewisse Zählrate (Ereignisse pro s) messen. Diese Rate ist gleich

$$\frac{V}{(2\pi)^3} k'^2 dk' d\Omega \Gamma_{i \rightarrow f} = j_i d\sigma, \quad (6.24)$$

wobei  $d\sigma$  ein differentiales Flächenelement senkrecht zu einfallenden Teilchenstrom  $j_i$  ist und  $\Gamma_{i \rightarrow f}$  die Übergangsrate in den Endzustand  $\vec{k}'$ , siehe Abb. 6.3.

## Allgemeiner Streuquerschnitt

Wir müssen im folgenden etwas genauer spezifizieren, was der Detektor eigentlich mißt. Falls der Detektor *wellenlängendispersiv* arbeitet, ist die interessierende Größe

$$\frac{d^2\sigma}{dk'd\Omega}(k', \Omega) = \frac{1}{j_i} \frac{V}{(2\pi)^3} k'^2 \Gamma_{i \rightarrow f} .$$

Der Streuquerschnitt ist ein Maß dafür, wie stark das Streuzentrum in den Raumwinkel  $d\Omega$  und in den Impulsbereich zwischen  $k'$  und  $k' + dk'$  streut.

## Differentieller Streuquerschnitt

Angenommen, der Detektor ist nicht nur für den Impulsbereich  $dk'$  um  $k$  herum empfindlich, sondern zählt einfach alle in  $d\Omega$  gestreuten Teilchen ohne Rücksicht auf ihre Energie. Man integriert dann die linke Seite von (6.24) über  $dk'$  und nennt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega) := \frac{1}{j_i} \frac{V}{(2\pi)^3} \int k'^2 \Gamma_{i \rightarrow f} dk'$$

den *differentiellen Streuquerschnitt* für die Streuung nach  $\Omega$ .

## Endzustände bei der Bremsstrahlung

Im Fall der Bremsstrahlung gibt es allerdings noch eine Komplikation. Man hat es ja nach der Streuung mit zwei Teilchen zu tun, dem Elektron  $\hbar\vec{k}'$  und dem Photon  $\hbar\vec{q}$ . Die Energie des Photons ist nicht festgelegt, sondern gehorcht einer gewissen Verteilung. Der Detektor für die Photonen soll wellenlängendispersiv arbeiten, der für die gestreuten Elektronen dagegen nicht. Den bei der Bremsstrahlung interessieren wir uns in erster Sicht für die Wellenlänge des erzeugten Photons (wichtig für Anwendungen wie Röntgenaufnahmen), aber nicht für die Energie des gestreuten Elektrons.

Wir fragen also jetzt nach dem differentiellen Streuquerschnitt für die Streuung eines Elektrons in den Raumwinkel  $d\Omega_{\vec{k}'}$  unter Aussendung eines Photons mit einem Impuls zwischen  $\hbar q$  und  $\hbar(q + \Delta q)$  in den Raumwinkel  $d\Omega_{\vec{q}}$ . Man schreibt diese Größe als

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_{\vec{k}'}d\Omega_{\vec{q}}dq}(\Omega_{\vec{k}'}, q, \Omega_{\vec{q}}).$$

Geschwindigkeiten:  $\vec{v} := \frac{\hbar\vec{k}}{m}$       und       $\vec{v}' := \frac{\hbar\vec{k}'}{m}$

-> Teilchenstrom:  $j_i = \frac{v}{V}$

-> Streuquerschnitt:

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_{\vec{k}'}d\Omega_{\vec{q}}dq} = \frac{V}{v} \left( \frac{V}{(2\pi)^3} \right)^2 q^2 \int \Gamma_{i \rightarrow f} k'^2 dk'$$

## Störungsrechnung erster Ordnung

Der Anteil  $V_K$  enthält keine Erzeuger für Photonen, also kann er in erster Ordnung keine Übergänge zwischen (6.22) und (6.23) verursachen. Den einzigen Beitrag wird der h.c.-Term in  $H_I'$  liefern. Seine Terme sind proportional zu  $c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}}^\dagger$ , und das zugehörige Feynman-Diagramm zeigt Abb. 6.1 rechts. Allerdings gilt Impuls- und Energie-Erhaltung, und diese beiden Forderungen lassen sich nicht gleichzeitig erfüllen. Das sieht man so ein:

Sei  $p^\mu$  der Viererimpuls des eintreffenden und  $p'^\mu$  der des austretenden Elektrons, ferner  $q^\mu$  der des Photons (wir setzen temporär  $\hbar = 1$ ). Dann gilt

$$m^2 c^2 = p^\mu p_\mu = (p'^\mu + q^\mu) (p'_\mu + q_\mu) .$$

Die rechte Seite ergibt mit  $q^\mu q_\mu = 0$  (das Photon ist massenlos):

$$m^2 c^2 + 0 + p'^\mu q_\mu + q^\mu p'_\mu = m^2 c^2 + 2p'^\mu q_\mu$$

Daraus folgt  $p'^\mu q_\mu = 0$ . Im Ruhesystem des austretenden Elektrons ist

$$p'^\mu = (mc, 0) \quad \text{und} \quad q^\mu = \left( \frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{c}, \vec{q} \right) ,$$

also gilt

$$p'^\mu q_\mu = mc \hbar\omega_{\vec{q}} = 0 .$$

Die Energie des Photons verschwindet, den betrachteten Prozeß gibt es also nicht. Die Bremsstrahlung ist ein Effekt zweiter Ordnung Störungsrechnung mit  $V_0$ .

## Störungsrechnung zweiter Ordnung

Das Matrixelement  $M_{if}^{(2)}$  lautet

$$M_{if}^{(2)} = \sum_m \frac{\langle f|V_0|m\rangle \langle m|V_0|i\rangle}{E_i - E_m + i\eta\hbar}, \quad \text{mit} \quad V_0 = H'_I + V_K, \quad (6.26)$$

was wir aus der QM-I, Theorie der Störungsrechnung, wissen. Um in der folgenden Rechnung nicht den Überblick zu verlieren, bedarf es etwas Buchhaltung. Für den Zwischenzustand  $|m\rangle$  gibt es zwei Möglichkeiten, damit der Zähler unter der Summe nicht verschwindet.

### (a) Zwischenzustand ohne Photon

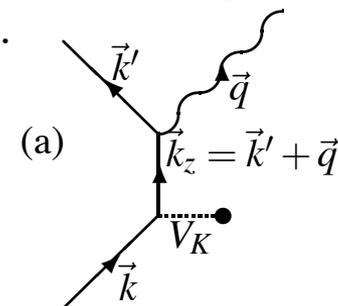
Der Zwischenzustand enthält kein Photon, sondern nur ein “intermediäres” Elektron mit Impuls  $\hbar\vec{k}_z$ ,

$$|m_a\rangle = c_{\vec{k}_z}^\dagger |0\rangle, \quad E_m^a = \frac{\hbar^2 \vec{k}_z^2}{2m}.$$

Der Zähler von (6.26) lautet

$$\langle f|H'_I + V_K|m_a\rangle \langle m_a|H'_I + V_K|i\rangle = \langle f|H'_I|m_a\rangle \langle m_a|V_K|i\rangle, \quad (6.27)$$

denn  $H'_I$  erzeugt mit seinem h.c.-Anteil genau das im Endzustand benötigte Photon,  $V_K$  hingegen gar keines. Den Feynman-Graphen zeigt Abb. 6.4 links.



## (b) Zwischenzustand mit Photon

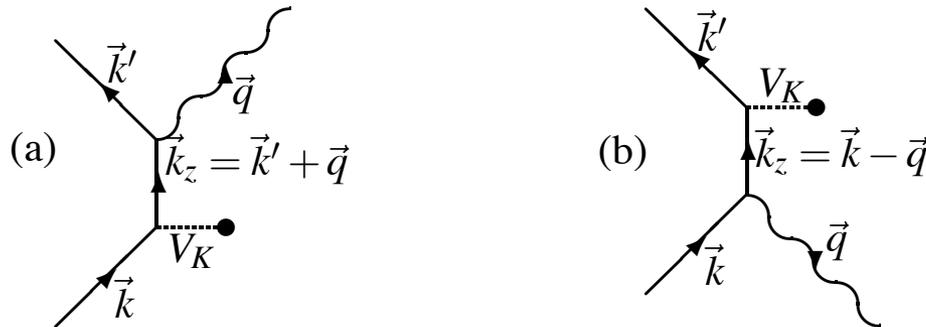
Der Zwischenzustand enthält ein Photon mit Impuls  $q$  und ein Elektron mit Impuls  $\hbar\vec{k}_z$ . Ein Photon  $\hbar\vec{q}$ , ein Elektron  $\hbar\vec{k}_z$ .

$$|m_b\rangle = c_{\vec{k}_z}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger |0\rangle, \quad E_m^b = \frac{\hbar^2 \vec{k}_z^2}{2m} + \hbar c q.$$

Der Zähler von (6.26) lautet

$$\langle f | V_K | m_b \rangle \langle m_b | H_I' | i \rangle, \quad (6.28)$$

und der Feynman-Graph ist in Abb. 6.4 rechts zu sehen. Von  $H_I'$  in den Matrixelementen schlägt immer nur der h.c.-Teil zu, der andere liefert keinen Beitrag. Die Summe in  $M_{if}^{(2)}$  geht dann über alle  $\vec{k}_z$  des intermediären Elektrons und über die Fälle (a) und (b).



Die Emission der Bremsstrahlung läuft also in zwei Stufen ab: der Streuung am Kern und der Emission eines Photons (oder umgekehrt). Es folgt die Berechnung der Matrixelemente.

## (a) Zwischenzustand ohne Photon - Matrixelemente

Zu berechnen ist (6.27). Es ist

$$\begin{aligned}
 \langle m_a | V_K | i \rangle &= \langle 0 | c_{\vec{k}_z} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} c_{\vec{k}_1}^\dagger \tilde{V}_K(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \langle 0 | \left( c_{\vec{k}_z} c_{\vec{k}_1}^\dagger \right) \tilde{V}_K(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \left( c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}}^\dagger \right) | 0 \rangle \\
 &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \delta_{\vec{k}_z, \vec{k}_1} \tilde{V}_K(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}} = \tilde{V}_K(\vec{k}_z - \vec{k})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \langle f | H'_I | m_a \rangle &= \langle 0 | c_{\vec{k}'} a_{\vec{q}} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}_1} M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{q}_1) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}_1}^\dagger c_{\vec{k}_z}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}_1} \langle 0 | \left( c_{\vec{k}'} c_{\vec{k}_1}^\dagger \right) \left( a_{\vec{q}} a_{\vec{q}_1}^\dagger \right) \left( c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_z}^\dagger \right) | 0 \rangle M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{q}_1) \\
 &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}_1} \delta_{\vec{k}', \vec{k}_1} \delta_{\vec{q}, \vec{q}_1} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_z} M_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{q}_1) \\
 &= -\frac{e\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} \delta_{\vec{k}_z, \vec{q} + \vec{k}'} \left( \vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{k}_z \right) .
 \end{aligned}$$

$$\langle m_a | V_K | i \rangle = \tilde{V}_K(\vec{k}_z - \vec{k}) \quad \langle f | H'_I | m_a \rangle = -\frac{e\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} \delta_{\vec{k}_z, \vec{q} + \vec{k}'} \left( \vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{k}_z \right)$$

Der erste Beitrag zu  $M_{if}^{(2)}$  ist also unter Beachtung von  $\vec{u}_{\vec{q}} \vec{q} = 0$

$$M_{if}^{(2)}(a) = \sum_{\vec{k}_z} \frac{\langle f | H'_I | m_a \rangle \langle m_a | V_K | i \rangle}{E_i - E_m^a + i\eta\hbar} \stackrel{\eta \rightarrow 0}{=} -\frac{e\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} \frac{\tilde{V}_K(\vec{q} + \vec{k}' - \vec{k}) \left( \vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{k}' \right)}{\hbar^2 \left( \vec{k}^2 - (\vec{q} + \vec{k}')^2 \right) / 2m}.$$

Wegen der Erhaltung der Energie,

$$E_f = \frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m} + \hbar c q = E_i = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m},$$

läßt er sich auch als

$$N_a = \hbar c q - \frac{\hbar^2 \vec{q}^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{m} \vec{q} \cdot \vec{k}' = \hbar c q \left( 1 - \frac{\hbar \vec{q} \cdot \vec{k}'}{m c q} - \frac{\hbar \vec{q}^2}{2m c q} \right) \quad (6.29)$$

schreiben. Der zweite Term in der Klammer ist aber

$$\frac{\hbar \vec{k}'}{m} \cdot \frac{\vec{q}}{c q} \approx \frac{p'}{v' m} \frac{v' q}{c q} \approx \frac{v'}{c},$$

wobei  $v'$  die Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Stoß ist. Der dritte Term von (6.29) ist nochmals von der Größenordnung  $v/c$  kleiner, da  $q$  wesentlich kleiner als die Elektronenimpulse sein soll. Deswegen nähert man für den nichtrelativistischen Fall  $N_a \approx \hbar c q = \hbar \omega_{\vec{q}}$ .

## (b) Zwischenzustand mit Photon - Matrixelemente

Die Rechnung geht analog zum Fall (a) und das Ergebnis für den zweiten Beitrag in  $M_{if}^{(2)}$  ist

$$M_{if}^{(2)}(b) = \sum_{\vec{k}_z} \frac{\langle f|V_K|m_b\rangle \langle m_b|H'_I|i\rangle}{E_i - E_m^b + i\eta\hbar} \stackrel{\eta \rightarrow 0}{=} -\frac{e\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} \frac{\tilde{V}(\vec{q} + \vec{k}' - \vec{k}) \vec{u}_{\vec{q}} \cdot \vec{k}}{\hbar^2 (\vec{k}^2 - (\vec{q} - \vec{k})^2) / 2m - \hbar c q}.$$

Für den Nenner gilt wieder

$$\begin{aligned} N_b &= \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \left( \frac{\hbar^2 \vec{q}^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \vec{q} \cdot \vec{k}}{m} \right) - \hbar c q = \\ &= -\hbar c q \left( 1 + \frac{\hbar \vec{q}^2}{2mcq} - \frac{\hbar \vec{q} \cdot \vec{k}}{mcq} \right) \approx -\hbar \omega_{\vec{q}}. \end{aligned}$$

## Summe der Matrixelemente - Kernpotential

Die beiden Zwischenzustände (mit und ohne Photon) zusammen ergeben nun

$$M_{if}^{(2)} = M_{if}^{(2)}(a) + M_{if}^{(2)}(b) = -\frac{e\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} \frac{(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{u}_{\vec{q}}}{\hbar \omega_{\vec{q}}} \tilde{V}_K(\vec{q} + \vec{k}' - \vec{k}). \quad (6.30)$$

Bisher haben wir über das Kernpotential keine genauere Aussage gemacht. Ab jetzt soll jedoch

$$V_K(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{r}$$

sein. Für die Fourier-Transformierte  $\tilde{V}_K\vec{k}$  gilt dann

$$\tilde{V}_K\vec{k} = -\frac{Ze^2}{V} \int_V \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} d^3r = -\frac{Ze^2}{V} \int_V \left(-\frac{1}{k^2}\right) \frac{\Delta e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} d^3r.$$

Zweimalige partielle Integration und die Ersetzung

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

ergibt

$$\tilde{V}_K\vec{k} = \frac{Ze^2}{Vk^2} \int_V \left(\Delta \frac{1}{r}\right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r = -\frac{4\pi Ze^2}{Vk^2}. \quad (6.31)$$

Damit wird

$$M_{if}^{(2)} = \frac{4\pi Ze^3 \hbar}{mc} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}} \frac{(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{u}_{\vec{q}}}{V \hbar \omega_{\vec{q}} (\vec{q} + \vec{k}' - \vec{k})^2}.$$

## Niederenergiestreuung

Wir nehmen nun an, daß die Energie des Photons  $\omega := \omega_{\vec{q}}$  viel kleiner ist als die der Elektronen, und setzen

$$\left(\vec{q} + \vec{k}' - \vec{k}\right)^2 \approx \left(\vec{k}' - \vec{k}\right)^2 := \left(\Delta\vec{k}\right)^2 = \frac{m^2}{\hbar^2} (\Delta\vec{v})^2 .$$

Daraus folgt gleichzeitig  $|\vec{v}| = |\vec{v}'|$ , denn wenn das Photon vernachlässigt wird, ist die Streuung des Elektrons elastisch. Für die Übergangsrates ergibt sich so

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) \left| M_{if}^{(2)} \right|^2 = \dots = \frac{64\pi^4 Z^2 e^6 \hbar^2 (\vec{u} \Delta\vec{v})^2}{V^3 \omega^3 m^4 (\Delta\vec{v})^4} \delta(E_i - E_f) .$$

Ist  $\vartheta$  der Winkel zwischen der Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  und  $\vec{v}'$  vor und nach dem Stoss, dann gilt noch

$$|\Delta\vec{v}| = 2v \sin \frac{\vartheta}{2} .$$

## Differentielle Streuquerschnitt für die Bremsstrahlung

Der differentielle Streuquerschnitt (6.25) kann jetzt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\sigma}{d\Omega_{\vec{k}'} d\Omega_{\vec{q}} dq} &= \frac{V}{v} \left( \frac{V}{(2\pi)^3} \right)^2 q^2 \int \Gamma_{i \rightarrow f} k'^2 dk' = \\ &= \frac{64\pi^4 Z^2 \hbar^2 e^6 q^2}{(2\pi)^6 \omega^3 m^4} \int \frac{(\vec{u} \cdot \Delta\vec{v})^2 k'^2}{16v^5 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \delta(E_i - E_f) dk' \end{aligned}$$

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_{\vec{k}'}d\Omega_{\vec{q}}d\omega} = \frac{64\pi^4 Z^2 \hbar^2 e^6 q^2}{(2\pi)^6 \omega^3 m^4} \int \frac{(\vec{u} \cdot \Delta\vec{v})^2 k'^2}{16v^5 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \delta(E_i - E_f) dk'$$

Hier bahnt sich schon ein Rutherford-Streuquerschnitt an. Im Integranden hängt nur  $k'^2$  und die  $\delta$ -Funktion von  $k'$  ab, außerdem ist

$$\delta(E_i - E_f) = \delta\left(\frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}\right) = \frac{2m}{\hbar^2} \delta(\vec{k}'^2 - \vec{k}^2).$$

Das Integral läßt sich jetzt leicht ausführen:

$$\int k'^2 \delta(\vec{k}'^2 - \vec{k}^2) dk' = \int \frac{\xi}{2\sqrt{\xi}} \delta(\xi - \vec{k}^2) d\xi = \frac{k}{2} = \frac{m\mathbf{v}}{2\hbar}.$$

Zusammen mit  $q = \omega/c$  wird dann

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_{\vec{k}'}d\Omega_{\vec{q}}d\omega} = \frac{Z^2 e^4}{m^2 v^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \frac{(\vec{u} \cdot \Delta\vec{v})^2 e^2}{16\pi^2 c^2 \hbar \omega}. \quad (6.32)$$

Im ersten Faktor erkennt man den Rutherford-Streuquerschnitt wieder, und der zweite Faktor gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür an, zusätzlich noch die Emission eines Photons der Energie  $\hbar\omega_{\vec{q}}$  im Raumwinkel  $d\Omega_{\vec{q}}$  zu beobachten.





