Quantenmechanik II

Die Dirac-Gleichung

Part **II (Transformationsverhalten)**

Heiko Rieger

SS2017

Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung

Die Lorentz-Kovarianz und Transformation von Spinoren

Wir betrachten zwei Inertialsysteme I und I' mit den Raum-Zeit-Koordinaten x und x'. Die Wellenfunktion eines Teilchens sei in diesen beiden Systemen durch ψ und ψ' gegeben. Die Poincaré-Transformation zwischen I und I' sei

$$x' = \Lambda x + a \; . \tag{6.2.1}$$

Die Wellenfunktion ψ' muß aus ψ rekonstruierbar sein. Das bedeutet, daß zwischen ψ' und ψ ein lokaler Zusammenhang gelten muß

$$\psi'(x') = F(\psi(x)) = F(\psi(\Lambda^{-1}(x' - a)) \; . \tag{6.2.2}$$

Das Relativitätsprinzip zusammen mit dem funktionalen Zusammenhang (6.2.2) bedingt die Forderung der *Lorentz-Kovarianz* : Die Dirac-Gleichung in I wird durch (6.2.1) und (6.2.2) in eine Dirac-Gleichung in I' transformiert. (Die Dirac-Gleichung ist forminvariant gegenüber Poincaré-Transformationen.) Damit sowohl ψ wie auch ψ' der linearen Dirac-Gleichung genügen können, muß der funktionale Zusammenhang linear sein, d.h.

$$
\begin{aligned}
\psi'(x') &= S(\Lambda)\psi(x) \\
&= S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}(x'-a)) \ .
\end{aligned}
\tag{6.2.3}
$$

$S(\Lambda)$ ist eine 4×4 Matrix, mit der der Spinor ψ zu multiplizieren ist. Wir werden $S(\Lambda)$ im folgenden bestimmen. In Komponenten lautet die Transformation

$$
\psi'_\alpha(x') = \sum_{\beta=1}^{4} S_{\alpha\beta}(\Lambda)\psi_\beta(\Lambda^{-1}(x'-a)) \ . \tag{6.2.3$'$}
$$

Die Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung bedeutet, daß ψ' der Gleichung

$$
(-\mathrm{i}\gamma^\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 \qquad (c = 1,\ \hbar = 1) \tag{6.2.4}
$$

genügt, wobei

$$
\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \ .
$$

Die γ-Matrizen ändern sich bei der Lorentz-Transformation nicht. Um S zu bestimmen, müssen wir die Dirac-Gleichungen im gestrichenen und ungestrichenen Koordinatensystem ineinander überführen. Die Dirac-Gleichung im ungestrichenen Koordinatensystem

$$(-\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \tag{6.2.5}$$

kann mittels

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$$

und

$$S^{-1}\psi'(x') = \psi(x)$$

in die Form

$$(-\mathrm{i}\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu + m)S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0 \tag{6.2.6}$$

gebracht werden. Nach Multiplikation von links mit S erhält man[1]

$$-\mathrm{i}S\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}\partial'_\nu \psi'(x') + m\psi'(x') = 0\ . \tag{6.2.6$'$}$$

Aus dem Vergleich von (6.2.6′) mit (6.2.4) folgt, daß die Dirac-Gleichung forminvariant unter Lorentz-Transformationen ist, wenn $S(\Lambda)$ die folgende Bedingungsgleichung erfüllt

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\nu}S(\Lambda) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}\ . \tag{6.2.7}$$

Man kann zeigen (siehe folgender Abschnitt), daß diese Gleichung nichtsinguläre Lösungen für $S(\Lambda)$ hat.[2] Eine Wellenfunktion, die sich bei einer Lorentz-Transformation nach $\psi' = S\psi$ transformiert, heißt *vierkomponentiger Lorentz-Spinor*.

Einschub: Infinitesimale Lorentz-Trafos

Die Untergruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ mit $\det\Lambda = +1$ (eigentlich) und $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ (orthochron) nennt man **eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe** oder einfach **eingeschränkte Lorentz-Gruppe**. Sie ist eine kontinuierliche Gruppe - eine so genannte Lie-Gruppe. Kontinuierliche Gruppen werden am einfachsten durch infinitesimalen Transformationen analysiert. Die endlichen Transformationen werden dann durch mehrfaches anwenden der infinitesimalen Transformationen erhalten - Potenzierung.

Schreiben wir dann für die Lorentz-Transformationen

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu$$

Einsetzen in der Bedingung $g = \Lambda^T g \Lambda$ gibt uns

$$g_{\rho\sigma} = (\delta^\mu{}_\rho + \Delta\omega^\mu{}_\rho) g_{\mu\nu} (\delta^\nu{}_\sigma + \Delta\omega^\nu{}_\sigma) = g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}\Delta\omega^\mu{}_\rho + g_{\rho\nu}\Delta\omega^\nu{}_\sigma + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)$$

Also müssen wir haben, dass

$$\Delta\omega_{\sigma\rho} = -\Delta\omega_{\rho\sigma} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \Delta\omega^0{}_i &= +\Delta\omega^i{}_0 \\ \Delta\omega^i{}_j &= -\Delta\omega^j{}_i \end{aligned}.$$

Mit anderen Worten, die infinitesimale 4×4 Matrix $\Delta\omega_{\mu\nu}$ muss anti-symmetrisch sein. Das gibt uns 6 freie Variablen. Die Bedingungen $\det\Lambda = +1$ und $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ sind bereits durch die Annahme das die Transformation eine infinitesimale Abweichung der Einheitsmatrix ist garantiert. Benutzen wir die notation $\Delta\omega^0{}_i = -\Delta\eta_i$ und $\Delta\omega^i{}_j = \epsilon^i{}_j{}^k \Delta\theta_k = \epsilon_{ijk}\Delta\theta_k$, kann die Matrix $\Delta\omega$ mit Elementen $\Delta\omega^\mu{}_\nu$ dann auf die folgende Form gebracht werden

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}$$

$$\Delta\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\eta^1 & -\Delta\eta^2 & -\Delta\eta^3 \\ -\Delta\eta^1 & 0 & \Delta\theta^3 & -\Delta\theta^2 \\ -\Delta\eta^2 & -\Delta\theta^3 & 0 & \Delta\theta^1 \\ -\Delta\eta^3 & \Delta\theta^2 & -\Delta\theta^1 & 0 \end{pmatrix} = i\Delta\theta_i\mathcal{I}^i - i\Delta\eta_i\mathcal{K}^i$$

Die Matrizen $\mathcal{I}^i$ und $\mathcal{K}^i$ können direkt von der Gleichung abgelesen werden, aber werden auch später nochmal explizit dargestellt nachdem die Bedeutung dieser Matrizen festgestellt ist.

Beispiel I: Drehungen. Eine infinitesimale Drehung um die x^3-Achse ($\Delta\theta_3 = \theta/N$):

$$\Lambda = R_3\left(\frac{\theta}{N}\right): \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\theta}{N} & 0 \\ 0 & -\frac{\theta}{N} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \Delta\omega = i\frac{\theta}{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3 \tag{17}$$

Für $\theta/N \ll 1$ haben wir $(1 + \frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3) \approx e^{\frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3}$ und wir haben die endliche Drehung durch den Winkel θ von

$$\begin{aligned} R_3(\theta) &= \lim_{N\to\infty} R_3^N\left(\frac{\theta}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} + i\frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3\right)^N = \lim_{N\to\infty}(e^{i\frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3})^N \\ &= e^{i\theta\mathcal{I}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

Wir können $\mathcal{I}^3$ als die Erzeugende der Drehungen um der x^3-Achse identifizieren.

Drehgruppe

Drehungen um die drei Achsen x^1, x^2, x^3 werden beschrieben durch

$$R_i(\theta) = e^{i\theta\mathcal{I}^i} \tag{19}$$

mit

$$\mathcal{I}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Die Erzeugenden $\mathcal{I}^i$ erfüllen die $\mathfrak{su}(2)$-Algebra

$$[\mathcal{I}^i, \mathcal{I}^j] = i\epsilon^{ij}{}_k\mathcal{I}^k = i\epsilon_{ijk}\mathcal{I}^k \tag{21}$$

Beispiel II: Lorentz-Boosts Ein infinitesimaler Boost entlang der x^1-Achse:

$$\Lambda = L_1\left(\frac{\eta}{N}\right): \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\eta}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{\eta}{N} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\eta}{N} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i\frac{\eta}{N}\mathcal{K}^1 \tag{22}$$

Für $\eta/N \ll 1$ haben wir $(1 - i\frac{\eta}{N}\mathcal{K}^1) \approx e^{-i\frac{\eta}{N}\mathcal{K}^1}$ und wir haben den endlichen Boost

$$\begin{aligned} L_1(\theta) &= \lim_{N\to\infty} L_1^N\left(\frac{\eta}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} - i\frac{\eta}{N}\mathcal{K}^1\right)^N = \lim_{N\to\infty}(e^{-i\frac{\theta}{N}\mathcal{K}^1})^N \\ &= e^{-i\eta\mathcal{K}^1} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Boosts

Boosts entlang der drei Achsen x^1, x^2, x^3 werden beschrieben durch

$$L_i(\eta) = e^{-i\eta\mathcal{K}^i} \tag{24}$$

mit

$$\mathcal{K}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Die Erzeugenden $\mathcal{K}^i$ bilden keine geschlossene Algebra und die Lorentz-Boosts bilden auch keine Untergruppe der Lorentz-Gruppe. Stattdessen haben wir

$$[\mathcal{K}^i, \mathcal{K}^j] = -i\epsilon^{ij}{}_k\mathcal{I}^k = -i\epsilon_{ijk}\mathcal{I}^k \tag{26}$$

Lorentz-Algebra

Eine allgemeine infinitesimale Lorentz-Transformation in der eingeschränkten Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \tag{27}$$

können wir durch die Erzeugenden der Drehungen, und der Boosts ausdrücken

$$\Delta\omega = i\Delta\theta_i\mathcal{I}^i - i\Delta\eta_i\mathcal{K}^i \tag{28}$$

Die Erzeugenden bilden zusammen eine Algebra mit

$$[\mathcal{I}^i, \mathcal{I}^j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{I}^k, \quad [\mathcal{K}^i, \mathcal{K}^j] = -i\epsilon_{ijk}\mathcal{I}^k, \quad [\mathcal{I}^i, \mathcal{K}^j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}^k \tag{29}$$

Die endlichen Lorentz-Transformationen bekommt man durch potenzieren der infinitesimalen Transformationen.

$$R_i(\theta) = e^{i\theta\mathcal{I}^i}, \qquad L_i(\eta) = e^{-i\eta\mathcal{K}^i}. \tag{30}$$

Bestimmung der Darstellung $S(\Lambda)$

$$\boxed{S(\Lambda)^{-1}\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu}$$

Infinitesimale Lorentztransformationen

Wir betrachten zunächst *infinitesimale (eigentliche, orthochrone) Lorentz–Transformationen*

$$\Lambda^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu \tag{6.2.8a}$$

mit infinitesimalen und antisymmetrischen $\Delta\omega^{\nu\mu}$

$$\Delta\omega^{\nu\mu} = -\Delta\omega^{\mu\nu} \; . \tag{6.2.8b}$$

Diese Gleichung besagt, daß $\Delta\omega^{\nu\mu}$ nur 6 unabhängige, nicht verschwindende Elemente haben kann.

Diese Transformationen erfüllen die Definitionsrelation für Lorentz-Transformationen

$$\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\lambda\rho} \; , \tag{6.1.6a}$$

wie man durch Einsetzen von (6.2.8) in diese Gleichung sieht:

$$g^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} g^\rho{}_\nu + \Delta\omega^{\lambda\rho} + \Delta\omega^{\rho\lambda} + O\left((\Delta\omega)^2\right) = g^{\lambda\rho} \; . \tag{6.2.9}$$

Jedes der 6 unabhängigen Elemente von $\varDelta\omega^{\mu\nu}$ erzeugt eine infinitesimale Lorentz-Transformation. Wir betrachten typische Spezialfälle:

$$\varDelta\omega^0{}_1 = -\varDelta\omega^{01} = -\varDelta\beta : \quad \text{Transformation auf ein Koordinatensystem, das sich mit Geschwindigkeit } c\varDelta\beta \text{ in } x\text{-Richtung bewegt} \tag{6.2.10}$$

$$\varDelta\omega^1{}_2 = -\varDelta\omega^{12} = \varDelta\varphi : \quad \text{Transformation auf ein Koordinatensystem, das um den Winkel } \varDelta\varphi \text{ um die } z\text{-Achse gedreht ist. (Siehe Abb. 6.1)} \tag{6.2.11}$$

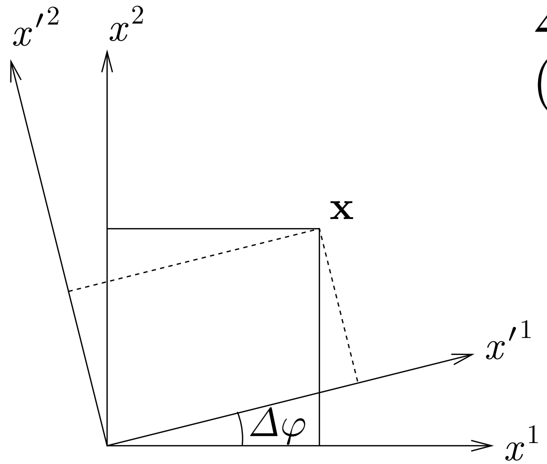

Abb. 6.1. Infinitesimale Drehung, passive Transformation

Die räumlichen Komponenten werden bei dieser *passiven* Transformation folgendermaßen transformiert

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 + \varDelta\varphi x^2 \\ x'^2 &= -\varDelta\varphi x^1 + x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varDelta\varphi \end{pmatrix} \times \mathbf{x} = \mathbf{x} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & -\varDelta\varphi \\ x^1 & x^2 & x^3 \end{vmatrix} \tag{6.2.12}$$

S muß in eine Potenzreihe in $\Delta\omega^{\nu\mu}$ entwickelbar sein. Wir schreiben

$$S = \mathbb{1} + \tau\ , \quad S^{-1} = \mathbb{1} - \tau\ , \tag{6.2.13}$$

wo τ ebenfalls infinitesimal, also von Ordnung $O(\Delta\omega^{\nu\mu})$ ist. Wir setzen in die Gleichung für S ein,
$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$, und erhalten

$$(\mathbb{1} - \tau)\gamma^\mu(\mathbb{1} + \tau) = \gamma^\mu + \gamma^\mu\tau - \tau\gamma^\mu = \gamma^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu\ , \tag{6.2.14}$$

woraus die Bestimmungsgleichung für τ

$$\gamma^\mu\tau - \tau\gamma^\mu = \Delta\omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{6.2.14$'$}$$

folgt. τ ist daraus bis auf ein additives Vielfaches von $\mathbb{1}$ eindeutig bestimmt.

Betrachten wir zwei Lösungen von (6.2.14$'$), so kommutiert die Differenz der beiden Lösungen mit allen γ^μ, muß also proportional zu $\mathbb{1}$ sein (siehe Abschn. 6.2.5, Eigenschaft 6). Diese Mehrdeutigkeit wird durch die Normierungsbedingung $\det S = 1$ beseitigt. Aufgrund derer gilt in erster Ordnung in $\Delta\omega^{\mu\nu}$

$$\det S = \det(\mathbb{1} + \tau) = \det \mathbb{1} + \operatorname{Sp}\tau = 1 + \operatorname{Sp}\tau = 1\ . \tag{6.2.15}$$

$$\det S = \det(\mathbb{1} + \tau) = \det \mathbb{1} + \operatorname{Sp} \tau = 1 + \operatorname{Sp} \tau = 1 \; . \tag{6.2.15}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Sp} \tau = 0 \; . \tag{6.2.16}$$

$$\gamma^\mu \tau - \tau \gamma^\mu = \Delta\omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{6.2.14$'$}$$

Gleichung (6.2.14′) und (6.2.16) haben die Lösung

$$\tau = \frac{1}{8} \Delta\omega^{\mu\nu} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = -\frac{\mathrm{i}}{4} \Delta\omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \; , \tag{6.2.17}$$

wobei die Definition

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{6.2.18}$$

eingeführt wurde. Man zeigt (6.2.17) indem man den Kommutator von τ mit γ^μ berechnet; das Verschwinden der Spur ist durch die allgemeinen Eigenschaften der γ-Matrizen garantiert (Eigenschaft 3, Abschn. 6.2.5).

Drehung um die z-Achse

Wir betrachten zunächst die in Gl. (6.2.11) dargestellte Drehung R_3 um die z-Achse. Nach (6.2.11) und (6.2.17) ist

$$\tau(R_3) = \frac{\mathrm{i}}{2}\Delta\varphi\sigma_{12} \quad ,$$

und mit

$$\sigma^{12} = \sigma_{12} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \mathrm{i}\gamma_1\gamma_2 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{6.2.19}$$

folgt

$$S = 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\Delta\varphi\sigma^{12} = 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\Delta\varphi\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \quad . \tag{6.2.20}$$

Aus der infinitesimalen Drehung können wir durch Zusammensetzen die Transformationsmatrix S für eine *endliche Drehung* um den Winkel ϑ bestimmen, indem wir die endliche Drehung in N Teilschritte ϑ/N zerlegen

Aus der infinitesimalen Drehung können wir durch Zusammensetzen die Transformationsmatrix S für eine *endliche Drehung* um den Winkel ϑ bestimmen, indem wir die endliche Drehung in N Teilschritte ϑ/N zerlegen

$$\begin{aligned}\psi'(x') = S\psi(x) &= \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2N}\vartheta\sigma^{12}\right)^N \psi(x)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vartheta\sigma^{12}}\psi\\ &= \left(\cos\frac{\vartheta}{2}+\mathrm{i}\sigma^{12}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\psi(x)\ .\end{aligned} \tag{6.2.21}$$

Für die Koordinaten und andere Vierervektoren bedeutet diese zusammengesetzte Transformation

$$\begin{aligned}x' &= \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1}+\frac{\vartheta}{N}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right)\cdots\left(\mathbb{1}+\frac{\vartheta}{N}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right)x\\ &= \exp\left\{\vartheta\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}x = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\vartheta&\sin\vartheta&0\\0&-\sin\vartheta&\cos\vartheta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}x\ ,\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

also tatsächlich die übliche Drehmatrix mit Winkel ϑ. Die Transformation S für Drehungen (Gl. (6.2.21)) ist *unitär* ($S^{-1} = S^\dagger$). Aus (6.2.21) sieht man

$$S(2\pi) = -1\!\!1 \tag{6.2.23a}$$

$$S(4\pi) = 1\!\!1 \; . \tag{6.2.23b}$$

Die Tatsache, daß Spinoren nicht bei einer Drehung um 2π sondern erst bei einer Drehung um 4π wieder ihren Ausgangswert einnehmen, wird in Neutroneninterferenzexperimenten beobachtet [3]. Wir weisen auf die Analogie zur Transformation von Pauli-Spinoren unter Drehungen

$$\varphi'(x') = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\varphi(x) \tag{6.2.24}$$

hin.

Lorentz-Transformation längs der $\mathbf{x^1}$-Richtung

Nach Gl. (6.2.10)

$$\varDelta\omega^{01} = \varDelta\beta \tag{6.2.25}$$

und (6.2.17) ist

$$\tau(L_1) = \frac{1}{2}\varDelta\beta\gamma_0\gamma_1 = \frac{1}{2}\varDelta\beta\alpha_1 \ . \tag{6.2.26}$$

Nun können wir daraus S für eine endliche Lorentz-Transformation längs der x^1-Achse bestimmen. Für die Geschwindigkeit $\frac{v}{c}$ ist $\tanh\eta = \frac{v}{c}$.
Die Zerlegung von η in N Teilschritte $\frac{\eta}{N}$ führt auf folgende Transformation der Koordinaten und anderer Vierervektoren

$$x'^{\mu} = \lim_{N\to\infty}\left(g + \frac{\eta}{N}I\right)^{\mu}{}_{\nu_1}\left(g + \frac{\eta}{N}I\right)^{\nu_1}{}_{\nu_2}\cdots\left(g + \frac{\eta}{N}I\right)^{\nu_{N-1}}{}_{\nu}x^{\nu}$$

$$g^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \ ,$$

$$I^{\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad I^3 = I$$

$$
\begin{aligned}
x' &= \mathrm{e}^{\eta I} x = \left(1 + \eta I + \frac{1}{2!}\eta^2 I^2 + \frac{1}{3!}\eta^3 I + \frac{1}{4!} I^2 \dots\right) x \\
x'^{\mu} &= \left(1 - I^2 + I^2 \cosh\eta + I \sinh\eta\right)^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \ .
\end{aligned} \tag{6.2.27}
$$

Die N-fache Anwendung der infinitesimalen Lorentz-Transformation

$$
L_1\left(\frac{\eta}{N}\right) = \mathbb{1} + \frac{\eta}{N} I
$$

führt im Limes großer N somit auf die Lorentz-Transformation (6.1.11)

$$
L_1(\eta) = \mathrm{e}^{\eta I} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{6.2.27'}
$$

Wir bemerken, daß sich die N infinitesimalen Schritte um $\frac{\eta}{N}$ zu η addieren und nicht etwa einfach die infinitesimalen Geschwindigkeiten. Dies entspricht der Tatsache, daß bei Zusammensetzung zweier Lorentztransformationen sich die beiden η und nicht die Geschwindigkeiten addieren.

Wir berechnen nun die zugehörige Spinor-Transformation

$$\begin{aligned} S(L_1) &= \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\eta}{N}\alpha_1\right)^N = \mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}\alpha_1} \\ &= \mathbb{1}\cosh\frac{\eta}{2}+\alpha_1\sinh\frac{\eta}{2} \quad . \end{aligned} \tag{6.2.28}$$

Bem.: $\alpha_i = \gamma_0\,\gamma_i$

Für Lorentz-Transformationen im engeren Sinne ist S *hermitesch* ($S(L_1)^\dagger = S(L_1)$).

Für *allgemeine infinitesimale Transformationen*, charakterisiert durch infinitesimale antisymmetrische $\varDelta\omega^{\mu\nu}$ gilt nach (6.2.17)

$$S(\varLambda) = \mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\mu\nu}\varDelta\omega^{\mu\nu} \ . \tag{6.2.29a}$$

Daraus folgt die endliche Transformation

$$S(\varLambda) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \tag{6.2.29b}$$

mit $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ und die Lorentz-Transformation lautet $\varLambda = \mathrm{e}^{\omega}$, wobei die Matrixelemente von ω gleich $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ sind. Beispielsweise kann eine Drehung um den Winkel ϑ um eine beliebige Drehachse $\hat{\mathbf{n}}$ durch

$$S = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vartheta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}} \tag{6.2.29c}$$

dargestellt werden, wo

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{6.2.29d}$$

ist.

Raumspiegelung, Parität

Die Lorentz-Transformation, die einer Raumspiegelung entspricht, wird durch

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.2.30}$$

dargestellt. Das zugehörige S wird nach Gl. (6.2.7) aus

$$S^{-1}\gamma^{\mu}S = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu}\gamma^{\nu} = g^{\mu\mu}\gamma^{\mu} \ , \tag{6.2.31}$$

bestimmt, wo über μ nicht summiert wird. Man sieht sofort, daß die Lösung von (6.2.31), die wir in diesem Fall mit P bezeichnen, durch

$$S = P \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\gamma^{0} \ . \tag{6.2.32}$$

gegeben ist. Hier ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ein unbeobachtbarer Phasenfaktor. Für diesen wird konventionell einer der vier Werte ± 1, $\pm \mathrm{i}$ gesetzt; dann geben vier Spiegelungen die Einheit $\mathbb{1}$. Die Spinoren transformieren sich unter einer Raumspiegelung gemäß

$$\psi'(x') \equiv \psi'(\mathbf{x}', t) = \psi'(-\mathbf{x}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\gamma^0\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\gamma^0\psi(-\mathbf{x}', t)\ . \qquad (6.2.33)$$

Die gesamte Raumspiegelungs(Paritäts)transformation für Spinoren wird mit

$$\mathcal{P} = \mathrm{e}^{i\varphi}\gamma^0\mathcal{P}^{(0)} \qquad (6.2.33')$$

bezeichnet, wobei $\mathcal{P}^{(0)}$ die Raumspiegelung $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ bewirkt. Aus $\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ ist ersichtlich, daß die Ruhezustände positiver und negativer Energie (Gl. (5.3.22)) Eigenzustände von P sind - mit entgegengesetzten Eigenwerten, d.h. entgegengesetzten Paritäten. *Das bedeutet, daß die inneren Paritäten für Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzt sind.*

Weitere Eigenschaften der S

Für die Berechnung der Transformation von Bilinearformen wie $j^\mu(x)$ benötigen wir einen Zusammenhang zwischen der adjungierten Transformation $S^\dagger$ und S^{-1}.

Behauptung:

$$S^\dagger \gamma^0 = b\gamma^0 S^{-1} \quad , \tag{6.2.34a}$$

wobei

$$b = \pm 1 \quad \text{für} \quad \Lambda^{00} \begin{cases} \geq +1 \\ \leq -1 \end{cases} \quad . \tag{6.2.34b}$$

Beweis: später

Transformation von Bilinearformen

Der *adjungierte* Spinor ist durch

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \tag{6.2.43}$$

definiert. Es sei daran erinnert, daß man $\psi^\dagger$ als hermitesch adjungierten Spinor bezeichnet. Die zusätzliche Einführung von $\bar{\psi}$ ist zweckmäßig, weil sich darin Größen wie z.B. die Stromdichte kompakt schreiben lassen. Daraus ergibt sich das folgende Transformationsverhalten unter einer Lorentz-Transformation.

$$\psi' = S\psi \Longrightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger S^\dagger \Longrightarrow \bar{\psi}' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 = b\, \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} \ ,$$

also

$$\bar{\psi}' = b\, \bar{\psi} S^{-1} \ . \tag{6.2.44}$$

Die Stromdichte (5.3.7) lautet mit obiger Definition

$$j^\mu = c\, \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = c\, \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \tag{6.2.45}$$

$$j^\mu = c\,\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = c\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{6.2.45}$$

und transformiert sich deshalb wie

$$j^{\mu\prime} = c\,b\,\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \Lambda^\mu{}_\nu c\,b\,\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = b\Lambda^\mu{}_\nu j^\nu\ . \tag{6.2.46}$$

Also transformiert sich j^μ wie ein Vektor für Lorentz-Transformationen ohne Zeitspiegelung. Desgleichen sieht man sofort aus (6.2.3) und (6.2.44), daß sich $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ wie ein Skalar transformiert:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= b\bar{\psi}(x')S^{-1}S\psi(x')\\ &= b\,\bar{\psi}(x)\psi(x)\ .\end{aligned} \tag{6.2.47a}$$

Wir stellen hier das Transformationsverhalten der wichtigsten bilinearen Größen unter *orthochronen Lorentz-Transformationen* , also solchen, die den *Zeitsinn nicht ändern*, zusammen:

$$\bar\psi'(x')\psi'(x') = \bar\psi(x)\psi(x) \qquad \text{Skalar} \tag{6.2.47a}$$

$$\bar\psi'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\bar\psi(x)\gamma^\nu\psi(x) \qquad \text{Vektor} \tag{6.2.47b}$$

$$\bar\psi'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar\psi(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x) \qquad \text{antisymmetrischer Tensor} \tag{6.2.47c}$$

$$\bar\psi'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') = (\det\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\bar\psi(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x) \qquad \text{Pseudovektor} \tag{6.2.47d}$$

$$\bar\psi'(x')\gamma_5\psi'(x') = (\det\Lambda)\bar\psi(x)\gamma_5\psi(x) \qquad \text{Pseudoskalar,} \tag{6.2.47e}$$

wo $\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ist. Wir erinnern daran, daß $\det\Lambda = \pm 1$ ist; für Raumspiegelungen ist das Vorzeichen -1.

Beweis der Relation 6.2.34

Beweis. Wir gehen aus von Gl. (6.2.7)

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \ , \qquad \Lambda^\mu{}_\nu \text{ reell,} \tag{6.2.35}$$

und schreiben die adjungierte Relation auf

$$(\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu)^\dagger = S^\dagger \gamma^{\mu\dagger} S^{\dagger -1} \ . \tag{6.2.36}$$

Die hermitesch adjungierte Matrix kann am kürzesten durch

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \tag{6.2.37}$$

ausgedrückt werden. Dies beinhaltet unter Verwendung der Antikommutationsrelationen $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \ \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k$. Wir setzen diese Relation auf der linken und der rechten Seite von Gl. (6.2.36) ein und multiplizieren mit γ^0 von links und rechts

$$\gamma^0 \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 S^{\dagger -1} \gamma^0$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = S^{-1} \gamma^\mu S = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (\gamma^0 S^\dagger \gamma^0)^{-1} \ ,$$

da $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$. Außerdem wurde auf der linken Seite $\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = S^{-1}\gamma^\mu S$ ersetzt. Nun multiplizieren wir mit S und S^{-1}

$$\gamma^\mu = S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (\gamma^0 S^\dagger \gamma^0)^{-1} S^{-1} \equiv (S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0)\gamma^\mu (S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0)^{-1}$$

Also kommutiert $S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0$ mit allen γ^μ und ist deshalb ein Vielfaches der Einheitsmatrix

$$S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = b\,\mathbb{1} \quad , \tag{6.2.38}$$

woraus auch

$$S\gamma^0 S^\dagger = b\gamma^0 \tag{6.2.39}$$

und die gesuchte Relation[4]

$$S^\dagger \gamma^0 = b(S\gamma^0)^{-1} = b\gamma^0 S^{-1} \tag{6.2.34a}$$

folgt. Da $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ und $S\gamma^0 S^\dagger$ hermitesch sind, erhält man durch Adjungieren von (6.2.39) $S\gamma^0 S^\dagger = b^*\gamma^0$, woraus

$$b^* = b \tag{6.2.40}$$

folgt, also ist b reell.

Verwendet man, daß die Normierung von S durch $\det S =$
1 festgelegt wurde, erhält man durch Berechnung der Determinante von Gl. (6.2.39) $b^4 = 1$. Daraus folgt zusammen mit (6.2.40)

$$b = \pm 1\ . \tag{6.2.41}$$

Die Bedeutung des Vorzeichens in (6.2.41) erkennt man, wenn

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= S^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S = b\gamma^0 S^{-1} \gamma^0 S = b\gamma^0 \Lambda^0{}_\nu \gamma^\nu \\ &= b\Lambda^0{}_0\, \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{3} b\Lambda^0{}_k \underbrace{\gamma^0 \gamma^k}_{\alpha^k} \end{aligned} \tag{6.2.42}$$

betrachtet wird. $S^\dagger S$ hat positiv definite Eigenwerte, wie man aus dem Folgenden erkennt. Zunächst ist $\det S^\dagger S = 1$ gleich dem Produkt aller Eigenwerte, und diese müssen deshalb alle verschieden von Null sein. Weiters ist $S^\dagger S$ hermitesch und für seine Eigenfunktionen gilt $S^\dagger S \psi_a = a\psi_a$, woraus

$$a\psi_a^\dagger \psi_a = \psi_a^\dagger S^\dagger S \psi_a = (S\psi_a)^\dagger S\psi_a > 0$$

folgt und somit $a > 0$. Da die Spur von $S^\dagger S$ gleich der Summe aller Eigenwerte ist, folgt daraus und aus Gl. (6.2.42) unter Verwendung von $\mathrm{Sp}\, \alpha^k = 0$

$$0 < \mathrm{Sp}\,(S^\dagger S) = 4b\Lambda^0{}_0\ .$$

Also ist $b\Lambda^0{}_0 > 0$. Folglich gilt der Zusammenhang zwischen den Vorzeichen von Λ^{00} und b:

$$\begin{aligned} \Lambda^{00} &\geq 1 \quad \text{für} \quad b = 1 \\ \Lambda^{00} &\leq -1 \quad \text{für} \quad b = -1\ . \end{aligned} \tag{6.2.34b}$$

Für Lorentz-Transformationen, die den Zeitsinn nicht ändern, ist $b = 1$, für solche, die ihn ändern ist $b = -1$.

Herleitung der Dirac-Gleichung durch Transformationsverhalten von Spinoren

Drehung im R^3: $\mathbf{r}' = \mathcal{R}\mathbf{r}$ mit $\mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{R} = 1$, d.h. $\mathcal{R} \in \mathrm{O}(3)$

Beispiel:
Drehungen um x, y, z-Achse:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathcal{R}_x(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\
\mathcal{R}_y(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

O(3) ist **nicht-abelsche-Gruppe**, d.h. Elemente kommutieren i.a. nicht
O(3) ist eine **Lie-Gruppe**, d.h. eine kontinuierliche Gruppe mit einer nicht-endlichen Anzahl von Elementen

Allgemeine Drehung hat drei Parameter, z.B. Euler-Winkel.
$\Rightarrow$ Es existieren drei **Generatoren**

$$
\begin{aligned}
J_z = \frac{1}{i}\frac{d\mathcal{R}_z(\theta)}{d\theta}\,|_{\theta=0} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
J_x = \frac{1}{i}\frac{d\mathcal{R}_x(\phi)}{d\phi}\,|_{\phi=0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
J_y = \frac{1}{i}\frac{d\mathcal{R}_y(\psi)}{d\psi}\,|_{\psi=0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(sind hermitesch).

Infinitesimale Rotationen: z.B. $\mathcal{R}_z(\delta\theta) \approx 1 + iJ_z\delta\theta,\ \mathcal{R}_x(\delta\phi) \approx 1 + iJ_x\delta\phi$
So ist z.B. der Kommutator:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{R}_z(\delta\theta)\mathcal{R}_x(\delta\phi)\mathcal{R}_z^{-1}(\delta\theta)\mathcal{R}_x^{-1}(\delta\phi) \\
= \ & 1 - \left(\delta\theta^2 + \delta\phi^2\right) - 2\underbrace{[J_z,\, J_x]}_{iJ_y}\delta\theta\,\delta\phi + \mathcal{O}(\delta^3)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ **J** Drehimpuls-Operator, d.h. $\boxed{[J_x,\, J_y] = iJ_z}$ und zyklisch.

Rotationen um endlichen Winkel:
z.B. $\theta = N \cdot \delta\theta$ $(N \to \infty)$, $\delta\theta = \theta/N$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad \mathcal{R}_z(\theta) &= [\mathcal{R}_z(\delta\theta)]^N \\
&= (1 + iJ_z\delta\theta)^N \\
&= \left(1 + iJ_z\frac{\theta}{N}\right)^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \exp(iJ_z\theta)
\end{aligned}$$

Allgemein: Rotation um Achse $\mathbf{n}$, Winkel θ:

$$\boxed{\mathcal{R}_{\mathbf{n}}(\theta) = \exp(i\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\theta}) = \exp(i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\theta)}$$

Betrachte nun **SU(2)**: (2×2 unitäre Matrizen mit Determinante 1, $\mathcal{U}\mathcal{U}^{+} = 1$, $\det \mathcal{U} = 1$)

Jedes Element aus SU(2) läßt sich schreiben als

$$\boxed{\mathcal{U} = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2}\right), \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z) = |\theta|\cdot\mathbf{n}} \qquad (*)$$

mit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Spin-Matrizen.

$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}$ ist Drehimpulsoperator ($\hbar = 1$)

$$\boxed{\left[\frac{\sigma_x}{2}, \frac{\sigma_y}{2}\right] = i\frac{\sigma_z}{2} \quad \text{und zyklisch}}$$

m.a.W.: SU(2)ist 2-dimensionale Darstellung der Drehgruppe und wirkt im Raum der Zweier- (oder Pauli-) Spinoren $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$.

SU(2) und O(3) haben ähnliche Struktur, allerdings entsprechen wegen des Faktors 1/2 im Exponenten von ($*$) jeweils 2 Elemente aus SU(2) einem Element aus O(3).

SL(2,C)und die Lorentzgruppe

SL(2,C)= $\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$: Komplexe 2×2 - Matrix mit $\det \mathcal{U} = 1\}$
Analog der Korrespondenz zwischen SU(2) und der Rotationsgruppe gibt es eine Korrespondenz zwischen SL(2,C) und der Lorentzgruppe.

Reine Lorentz-Boosts: z.B. Bewegung mit v entlang der x-Achse:

$$x' = \frac{x + vt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}},\; y' = y,\; z' = z,\; t' = \frac{t + vt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Definition:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},\; \beta = \frac{v}{c},\; x^0 = ct,\; x^1 = x \quad \text{etc.}$$

$$\rightsquigarrow \quad x^{0\prime} = \gamma(x^0 + \beta x^1),\; x^{1\prime} = \gamma(\beta x^0 + x^1),\; x^{2\prime} = x^2,\; x^{3\prime} = x^3$$

wegen $\gamma^2 - \beta^2\gamma = 1$ können wir setzen

$$\boxed{\gamma = \cosh\phi,\; \gamma\beta = \sinh\phi,\; \tanh\phi = \frac{v}{c}}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{B},\ \textbf{Boost-Matrix}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Generator dieser Boost-Trafo ist

$$K_x = \frac{1}{i}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \phi}\,|_{\phi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog:

$$K_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In dieser 4×4 - Matrix-Notation sind die Generatoren der Rotationen:

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lorentz-Transformation: Zusammengesetzt aus Boost in 3 Richtungen und um 3 Achsen. 6 Generatoren, s.o.

Kommutatorrelation:
$[K_x, K_y] = -iJ_z$ und zyklisch
$[J_x, K_x] = 0$ etc.
$[J_x, J_y] = iJ_z$ (zyklisch) und $[J_x, K_y] = iK_z$ (zyklisch)

n.b.: Reine Lorentz-Transformationen bilden keine Gruppe, da $\mathbf{K}$ keine geschlossene Algebra unter Kommutation bilden. Z.B. für 2 infinetesimale Boosts:

$$e^{iK_x\delta\phi}e^{iK_y\delta\psi}e^{-iK_x\delta\phi}e^{-iK_y\delta\psi} = 1 - [K_x, K_y]\delta\phi\,\delta\psi + K_x^2(\delta\phi)^2K_y^2(\delta\psi)^2 + \cdots$$

enthält wg. $[K_x, K_y] = -iJ_z$ eine Rotation um z-Achse ($\rightsquigarrow$ Thomas-Präzession).

Transformationsverhalten von Pauli-Spinoren unter Lorentz-Transformationen

Bemerkung:

$\mathbf{K} = \pm i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ erfüllt obige Kommutationsrelationen $\rightsquigarrow$ 2 Typen von Spinoren zu + bzw. -

Definition: die Generatoren

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{A} & := & \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}) \\ \mathbf{B} & := & \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}) \end{array}\right\} \implies \begin{array}{rcl} [A_x,\, A_y] & = & iA_z \quad \text{zykl.} \\ [B_x,\, B_y] & = & iB_z \quad \text{zykl.} \\ [A_i,\, B_j] & = & 0 \quad (i, j = x, y, z) \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ **A** und **B** generieren jeder eine Gruppe SU(2), und beide Gruppen kommutieren, d.h. Lorentzgruppe ist i.w. äquiv. SU(2) $\otimes$ SU(2) und Zustände, die in einer wohldefinierten Weise transformieren, werden mit 2 Drehimpulsen gekennzeichnet: $(j,\, j')$, j entspricht A, j' entspricht B.

Spez.:

$$\begin{array}{rcl} (j,\, 0) & \rightarrow & \mathbf{J}^{(j)} = i\mathbf{K}^{(j)} \quad (\mathbf{B} = 0) \\ (0,\, j) & \rightarrow & \mathbf{J}^{(j)} = -i\mathbf{K}^{(j)} \quad (\mathbf{A} = 0) \end{array}$$

Definition: 2 Typen von Spinoren:

- Typ I: $(\frac{1}{2}, 0)$: $\mathbf{J}^{(1/2)} = \boldsymbol{\sigma}/2$, $\mathbf{K}^{(1/2)} = -i\boldsymbol{\sigma}/2$, Spinor ξ.
  Seien $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$ die Parameter einer Rotation und einer reinen Lorentz-Transformation. Dann transformiert ξ wie

$$\xi \;\rightarrow\; \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\theta} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\phi}\right)\xi = \underbrace{\exp\left(i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\phi})\right)}_{=:\mathcal{U}}\xi$$

- Typ II: $(0, \frac{1}{2})$: $\mathbf{J}^{(1/2)} = \boldsymbol{\sigma}/2$, $\mathbf{K}^{(1/2)} = i\boldsymbol{\sigma}/2$, Spinor η.

$$\eta \;\rightarrow\; \underbrace{\exp\left(i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot(\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi})\right)}_{=:\mathcal{N}}\eta$$

n.b.: Dies sind nicht-äquivalente Darstellungen der Lorentz-Gruppe, d.h. es existiert keine Matrix $\mathcal{S}$, so daß $\mathcal{N} = \mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{S}^{-1}$. Sie sind stattdessen durch $\mathcal{N} = \zeta\mathcal{U}^*\zeta^{-1}$ mit $\zeta = -i\sigma_2$ verknüpft.

Es ist $\det\mathcal{U} = \det\mathcal{N} = 1$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{U}, \mathcal{N}$ formen Gruppe SL(2,C). 6 Parameter: $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$

Es gibt also zwei *verschiedene* Typen von 2-komponentigen Spinoren, die unterschiedlich unter Lorentz-Transformationen transformieren, ξ und η. Diese entsprechen den Darstellungen $(1/2, 0)$ und $(0, 1/2)$ der Lorentz-Gruppe.
Im Wesentlichen ist die **Dirac-Gleichung** eine Relation zwischen diesen Spinoren.

Paritäts-Operation: $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$

- $\Rightarrow$ Geschwindigkeit im Lorentz-Boost $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$.
- $\Rightarrow$ Generator $\mathbf{K} \to -\mathbf{K}$ ($\hat{=}$ Vektor), aber $\mathbf{J} \to +\mathbf{J}$ (Drehimpuls ist axialer oder Pseudo-Vektor).
- $\Rightarrow$ Darstellungen $(j, 0)$ und $(0, j)$ werden unter Parität ausgetauscht $(j, 0) \to (o, j)$ und daher $\xi \to \eta$.

Betrachten wir also die Parität, so genügt es nicht länger ξ und η separat zu betrachten, sondern den **4-Spinor**

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Unter Lorentz-Trafos:

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \;\rightarrow\; & \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\phi})\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\phi})\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\end{aligned}}$$

mit $\bar{D}(\Lambda) = \zeta D^*(\Lambda)\zeta^{-1}$ und Λ die Lorentz-Transformation: $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$.

Unter Paritäts-Trafo:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

4-Spinor ψ ist eine **irreduzible** Darstellung der Lorentz-Gruppe *erweitert* um Parität (ist *nicht* unitär wg. $\exp(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\phi}) \leftrightarrow$ L-Gruppe nicht kompakt).

Betrachte nun speziell L-Boost ($\theta = 0$) und definiere $\xi = \phi_{\mathrm{R}}$, $\eta = \phi_{\mathrm{L}}$ (R: right, L: left)

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad \phi_{\mathrm{R}} \quad \to \quad & e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}}\phi_{\mathrm{R}} \\ &= \left\{\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}\phi_{\mathrm{R}} \qquad (\mathbf{n}: \text{Richtung des L-Boosts}) \end{aligned}$$

Sei $\phi_{\mathrm{R}}(0)$ Spinor für Teilchen in Ruhe, $\phi_{\mathrm{R}}(\mathbf{p})$ Spinor für Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}$.

Wg. $\cos(\phi/2) = [(r+1)/2]^{1/2}$, $\sinh(\phi/2) = [(r-1)/2]^{1/2}$, $r = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $c = 1$, folgt

$$\phi_{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) = \left\{\left(\frac{r+1}{2}\right)^{1/2} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\left(\frac{r-1}{2}\right)^{1/2}\right\}\phi_{\mathrm{R}}(0)$$

Da für ein Teilchen mit (totaler) Energie E, Masse m und Impuls $\mathbf{p}$: $E = \gamma m$ ($c = 1$) folgt

$$\phi_{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) = \frac{E + m + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{[2m\,(E+m)]^{1/2}}\,\phi_{\mathrm{R}}(0)$$

analog

$$\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{p}) = \frac{E+m-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{[2m\,(E+m)]^{1/2}}\,\phi_{\mathrm{L}}(0) \quad\Rightarrow\quad \phi_{\mathrm{L}}(0) = \frac{E+m+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{[2m\,(E+m)]^{1/2}}\,\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{p})$$

Für ein Teilchen in Ruhe kann man seinen Spin nicht als links- oder rechtshändig definieren $\rightsquigarrow$ $\phi_{\mathrm{R}}(0) = \phi_{\mathrm{L}}(0)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \phi_{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) &= \frac{E+m+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{[2m\,(E+m)]^{1/2}}\cdot\frac{E+m+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{[2m\,(E+m)]^{1/2}}\,\phi_{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) \\
&= \frac{(E+m)^2+2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}(E+m)+p^2}{2m(E+m)}\,\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{p}) \\
&= \frac{E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m}\,\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

bzw.

$$\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{p}) = \frac{E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m}\,\phi_{\mathrm{R}}(\mathbf{p})$$

Also in Matrix-Form:

$$\begin{pmatrix} -m & p_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ p_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) \\ \phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Definition:
Der 4-Spinor

$$\psi(p) := \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) \\ \phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

und die 4×4-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

dann ist $(*)$:

$$\left(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m\right) \psi(p) = 0$$

$$\boxed{\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right) \psi(p) = 0}$$

die **Dirac-Gleichung**

n.b. ψ und γ^μ sind hier in der sog. **chiralen** Darstellung gegeben (da ϕ_R und ϕ_L Eigenzustände des Chiralitätsoperators sind, wie wir sehen werden), die **Standard-**Darstellung, die wir schon kennengelernt haben, ergibt sich durch die Ähnlichkeitstrafo:

$$\boxed{\psi_\mathrm{SR} = \mathcal{S}\psi_\mathrm{CR}; \quad \gamma^\mu = \mathcal{S}\gamma^\mu_\mathrm{CR}\mathcal{S}^{-1} \text{ mit } \mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{S}^{-1}}$$

$$\psi_\mathrm{SR} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_\mathrm{R} + \phi_\mathrm{L} \\ \phi_\mathrm{R} - \phi_\mathrm{L} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0_\mathrm{SR} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i_\mathrm{SR} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Für *Teilchen in Ruhe* ist dies sicher die geschicktere Darstellung:

$$
\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{SR}} &= u(0)e^{-imt} && \text{positive Energie} \\
\psi_{\mathrm{SR}} &= v(0)e^{imt} && \text{negative Energie}
\end{aligned}
$$

mit den uns schon bekannten 4-Spinoren:

$$
u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; v^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Lorentz-Boost in bewegtes Ko-System ($\boldsymbol{\theta} = 0$) in chiraler Darstellung.

$$
\begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}} \\ \phi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \phi'_{\mathrm{R}} \\ \phi'_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix}}_{u_{\mathrm{CR}}} \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}} \\ \phi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}
$$

$\Rightarrow$ Boost-Matrix in Standarddarstellung

$$
u_{\mathrm{SR}} = \mathcal{S} u_{\mathrm{CR}} \mathcal{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\phi}{2} & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sinh\frac{\phi}{2} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sinh\frac{\phi}{2} & \cosh\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}
$$

und wegen

$$\cos\frac{\phi}{2} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2}, \quad \sin\frac{\phi}{2} = \left(\frac{E-m}{2m}\right)^{1/2}, \quad \tanh\frac{\phi}{2} = \frac{p}{E+m} \quad \text{mit } p = \sqrt{E^2-m^2}$$

folgt

$$u_{\mathrm{SR}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_x+ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x-ip_y}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die entsprechenden Spinoren ψ (identisch mit denen, die wir aus der expliziten Lösung der Dirac-Gleichung gewonnen haben):

$$\begin{aligned} \psi^{(\alpha)}(x) &= u^{(\alpha)}(p)e^{-ipx}; \qquad \alpha = 1,2 \qquad & u^{(\alpha)}(p) &= u_{\mathrm{SR}}(p)u^{(\alpha)}(0) \\ \psi^{(\alpha)}(x) &= v^{(\alpha)}(p)e^{ipx} & v^{(\alpha)}(p) &= u_{\mathrm{SR}}(p)v^{(\alpha)}(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

wobei $p_\pm = p_x \pm ip_z$ und die Normierung $N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$, so daß $\bar{u}^{(1)}u^{(1)} = 1$, ebenso für $u^{(2)}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p)\, u^{(\alpha')}(p) &= \delta_{\alpha\alpha'} \\ \bar{v}^{(\alpha)}(p)\, v^{(\alpha')}(p) &= -\delta_{\alpha\alpha'} \\ \bar{u}^{(\alpha)}(p)\, v^{(\alpha')}(p) &= 0 \\ u^{(\alpha)+}(p)u^{(\alpha')}(p) &= v^{(\alpha)+}(p)v^{(\alpha')}(p) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\alpha'} \end{aligned}$$

Außerdem genügen u und v (Einsetzen in Dirac-Gleichung)

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot p - m)u(p) &= 0 \\ (\gamma \cdot p + m)v(p) &= 0 \end{aligned}$$

Die adjungierten Spinoren genügen

$$\bar{u}(p)(\gamma \cdot p - m) = 0$$
$$\bar{v}(p)(\gamma \cdot p + m) = 0$$

Der Operator

$$\boxed{P_+ := \sum_\alpha u^{(\alpha)}(p)\bar{u}^{(\alpha)}(p)}$$

ist Projektionsoperator wg.

$$P_+^2 = \sum_{\alpha,\beta} u^{(\alpha)}(p)\,\underbrace{\bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\beta)}(p)}_{=\delta^{\alpha\beta}}\,\bar{u}^{(\beta)}(p) = \sum_\alpha u^{(\alpha)}(p)\bar{u}^{(\alpha)}(p) = P_+$$

und projiziert auf Zustände mit positiver Energie.

Wir zeigen in der Übung: $P_+ = \frac{\gamma \cdot p + m}{2m}$

Analog

$$\boxed{P_- := -\sum_\alpha v^{(\alpha)}(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p)}$$

und $P_- = \frac{-\gamma\cdot p+m}{2m}$. Offenbar: $P_+ + P_- = 1$.

Bemerkung:
Bei der Quantisierung des Dirac-Feldes hatten wir die Lösungen

$$\psi(x) = u_s(p)e^{-ipx},\ \psi(x) = v_s(p)e^{ipx} \quad (s = \pm\frac{1}{2})$$

benutzt, mit

$$\frac{1}{\sqrt{2m}}u_{\frac{1}{2}} = u^{(1)},\ \frac{1}{\sqrt{2m}}u_{-\frac{1}{2}} = u^{(2)},\ \frac{1}{\sqrt{2m}}v_{\frac{1}{2}} = -v^{(1)},\ \frac{1}{\sqrt{2m}}v_{-\frac{1}{2}} = v^{(2)}$$

Das hat zur Folge dass

$$P_+ = \sum_\alpha u^{(\alpha)}(p)\bar{u}^{(\alpha)}(p) = \gamma \cdot p + m$$

und

$$P_- = -\sum_\alpha v^{(\alpha)}(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p) = \gamma \cdot p - m.$$

Wir werde in der QED diese Notation beibehalten.

Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung

Bei einer Lorentz-Transformation von einem Inertialsystem I in ein Inertialsystem I' transformieren sich die Koordinaten gemäß

$$x' = \Lambda x \quad \text{d.h. } x = \Lambda x'$$

und der Dirac-Spinor gemäß

$$\psi'(x') = \mathcal{S}(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$$

$\mathcal{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix}$ in der chiralen Darstellung.

Die Dirac-Gleichung sollte *forminvariant* unter dieser Lorentz-Transformation sein:

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0 \quad (I) \quad \Longleftrightarrow \quad (i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\,\psi'(x') = 0 \quad (I')}$$

Hier ist $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$

Wg. $\mathcal{S}^{-1}\psi'(x') = \psi(x)$ folgt aus (I)

$$\left(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\mu - m\right) \mathcal{S}^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

Durch Multiplikation von links mit $\mathcal{S}(\Lambda)$ erhält man

$$\left(i\mathcal{S}(\Lambda)\gamma^\mu \mathcal{S}^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m\right) \psi' = 0$$

Wenn also $\mathcal{S}(\Lambda)\gamma^\mu\mathcal{S}^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\tau \gamma^\tau$
folgt aus $\mathcal{S}(\Lambda)\gamma^\mu\mathcal{S}^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\tau \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\tau = \gamma^\nu$ und damit (I').

Bleibt also zu zeigen $\forall\Lambda$ LT:

$$\boxed{\mathcal{S}^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\mathcal{S}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu}$$

(Beachte $\mathcal{S}^{-1}(\Lambda) = \mathcal{S}(\Lambda^{-1})$)

Erinnerung:

$$\mathcal{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\phi})\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi})\right) \end{pmatrix}$$

Da jede Lorentz-Transformation aus den 3 Lorentz-Boosts entlang der Achsen x, y, z und 3 Rotationen um die 3 Achsen zusammengesetzt werden kann, betrachten wir diese Fälle separat.

(A) Λ Lorentz-Boost, d.h. $\boldsymbol{\theta} = 0$. O.B.d.A $\boldsymbol{\phi} = (\phi, 0, 0)$ (Boost entlang der x-Achse)

$$\rightsquigarrow \qquad \mathcal{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{+\frac{1}{2}\phi\sigma^x} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\phi\sigma^x} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{-1}\gamma^0\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathcal{S} &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\phi\sigma^x} & 0 \\ 0 & e^{+\frac{1}{2}\phi\sigma^x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{+\frac{1}{2}\phi\sigma^x} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\phi\sigma^x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & e^{-\phi\sigma^x} \\ e^{\phi\sigma^x} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cosh\phi - \sigma^x\sinh\phi \\ \cosh\phi + \sigma^x\sinh\phi & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{-1}\gamma^1\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^x \\ \sigma^x & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^x e^{\phi\sigma^x} \\ \sigma^x e^{\phi\sigma^x} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^x\left(\cosh\phi - \sigma^x\sinh\phi\right) \\ \sigma^x\left(\cosh\phi + \sigma^x\sinh\phi\right) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{-1}\gamma^{2,3}\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^{y,z} \\ \sigma^{y,z} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{-\frac{1}{2}\phi\sigma^x}\sigma^{y,z}e^{-\frac{1}{2}\phi\sigma^x} \\ e^{\frac{1}{2}\phi\sigma^x}\sigma^{y,z}e^{\frac{1}{2}\phi\sigma^x} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^{y,z} \\ \sigma^{y,z} & 0 \end{pmatrix} = \gamma^{2,3}
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}
\Lambda^0{}_\nu \gamma^\nu &= \cosh\phi\gamma^0 + \sinh\phi\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \cosh\phi - \sigma^x \sinh\phi \\ \cosh\phi + \sigma^x \sinh\phi & 0 \end{pmatrix} \\
\Lambda^1{}_\nu \gamma^\nu &= \sinh\phi\gamma^0 + \cosh\phi\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sinh\phi - \sigma^x \cosh\phi \\ \sinh\phi + \sigma^x \cosh\phi & 0 \end{pmatrix} \\
\Lambda^{2,3}_\nu \gamma^\nu &= \gamma^{2,3}
\end{aligned}$$

Durch Vergleich von links mit rechts sieht man die Identität.

(B) Λ Drehung, d.h. $\phi = 0$, o.B.d.A. $\boldsymbol{\theta} = (\theta, 0, 0)$ geht analog zu (A) mit

$$\mathcal{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\theta\sigma^x} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^x} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Transformationsverhalten bilinearer Ausdrücke wie $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ etc.

Wir benutzen wieder die chirale Darstellung

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}} \\ \phi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$$

Erinnerung: Unter Lorentz-Transformation:

$$\phi_{\mathrm{R}} \to \exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\phi})\right]\phi_{\mathrm{R}}; \qquad \phi_{\mathrm{L}} \to \exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi})\right]\phi_{\mathrm{L}}$$

$$\rightsquigarrow \qquad \phi_{\mathrm{R}}^+ \to \phi_{\mathrm{R}}^+ \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi})\right]; \qquad \phi_{\mathrm{L}}^+ \to \phi_{\mathrm{L}}^+ \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\phi})\right]$$

Es ist sofort klar, daß $\psi^+\psi = \phi_{\mathrm{R}}^+\phi_{\mathrm{R}} + \phi_{\mathrm{L}}^+\phi_{\mathrm{L}}$ *nicht* invariant ist. Jedoch der **adjungierte** Spinor hat die Komponenten

$$\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0 = \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}}^+ & \phi_{\mathrm{L}}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{L}}^+ & \phi_{\mathrm{R}}^+ \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$\boxed{\bar{\psi}\psi = \phi_{\mathrm{L}}^{+}\phi_{\mathrm{R}} + \phi_{\mathrm{R}}^{+}\phi_{\mathrm{L}}}$$

invariant unter Lorentz-Transformation (d.h. ist "**skalar**")
Außerdem ist unter Paritäts-Transformation $\phi_{\mathrm{R}} \leftrightarrow \phi_{\mathrm{L}}$, so daß $\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi}\psi$, d.h. $\bar{\psi}\psi$ ist echter Skalar, da er bei Raumspiegelung nicht das Vorzeichen wechselt.

Wir definieren nun die 4×4- Matrix

$$\boxed{\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \underset{\text{(in chiraler Darst.)}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Dann ist

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi = \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}}^{+} & \phi_{\mathrm{L}}^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}} \\ \phi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} = \phi_{\mathrm{L}}^{+}\phi_{\mathrm{R}} - \phi_{\mathrm{R}}^{+}\phi_{\mathrm{L}}$$

invariant unter Lorentz-Transformationen, wechselt aber bei Paritäts-Transformation das Vorzeichen $\rightsquigarrow$ $\boxed{\bar{\psi}\gamma^5\psi \text{ ist } \textbf{Pseudoskalar}}$

Betrachte nun die Größe $\boxed{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}$, wir zeigen, daß sie wie ein 4-Vektor unter Lorentz-Transformationen transformiert.

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^0\psi &= \phi_{\mathrm{R}}^+\phi_{\mathrm{R}} + \phi_{\mathrm{L}}^+\phi_{\mathrm{L}} \\
\bar{\psi}\,\boldsymbol{\gamma}\,\psi &= \left(\phi_{\mathrm{R}}^+ \quad \phi_{\mathrm{L}}^+ \right) \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{R}} \\ \phi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} = -\phi_{\mathrm{L}}^+\boldsymbol{\sigma}\phi_{\mathrm{L}} + \phi_{\mathrm{R}}^+\boldsymbol{\sigma}\phi_{\mathrm{R}}
\end{aligned}$$

Unter räumlichen Drehungen ($\boldsymbol{\theta} \neq 0,\ \boldsymbol{\phi} = 0$) haben wir

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi \to \bar{\psi}\gamma^0\psi \qquad (**)$$

und für $\boldsymbol{\theta}$ infinitesimal

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi \to \quad & -\phi_{\mathrm{L}}^+ e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\sigma} e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}} + \phi_{\mathrm{R}}^+ e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\sigma} e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}} \\
&= -\phi_{\mathrm{L}}^+ \left(1 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\phi_{\mathrm{L}} + \phi_{\mathrm{R}}^+ \left(1 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\phi_{\mathrm{R}} \\
&= -\phi_{\mathrm{L}}^+ \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\sigma}\right)\phi_{\mathrm{L}} + \phi_{\mathrm{R}}^+ \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\sigma}\right)\phi_{\mathrm{R}} \\
&= \bar{\psi}\,\boldsymbol{\gamma}\,\psi - \boldsymbol{\theta}\times\left(\bar{\psi}\,\boldsymbol{\gamma}\,\psi\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

($*$) beschreibt das Verhalten eines Vektors unter Rotationen.

Da die Zeitkomponente wg. (**) invariant unter Rotationen ist, verhält sich $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ tatsächlich wie ein 4-Vektor unter Rotationen.

Übung: Überprüfe, daß $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ sich wie ein 4-Vektor auch unter L-Boosts verhält.
Unter Parität: $\bar{\psi}\gamma^0\psi \to \bar{\psi}\gamma^0\psi$, $\bar{\psi}\gamma\psi \to -\bar{\psi}\gamma\psi$, d.h. $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ **polarer** Vektor. i.e. $\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu_{\ \nu}\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$.

Analog: $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ verhält sich wie **axialer** Vektor, d.h. wie Vektor unter L-Trafos, aber unter Parität $\bar{\psi}\gamma\psi \to \bar{\psi}\gamma\psi$. i.e. $\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') = \Lambda^\mu_{\ \nu}\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\psi(x) \cdot \det(\Lambda)$

Zusammenfassend:

- $\bar{\psi}\psi$ Skalar
- $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ Pseudoskalar
- $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ Vektor (polar)
- $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ axialer Vektor
- $\bar{\psi}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi$ antisymmetrischer Tensor