

Quantenmechanik II

2. Quantisierung des KG- und Dirac-Feldes

Heiko Rieger
SS2017

Kanonische Quantisierung eines Skalarfeldes

1. *Kanonische Quantisierung*: Die kanonische Quantisierung orientiert sich stark an der Entwicklung der Quantenmechanik. Es werden geeignete kanonisch-konjugierte Variablen (der Felder) gesucht, die dann durch Operatoren ersetzt werden, wobei die Poisson-Klammer der klassischen Physik in den Kommutator übergeht. Ein Problem dieses Verfahren ist, daß die Zeit als eine ausgezeichnete Koordinate behandelt wird und das so i.a. die Lorentz-Invarianz der quantisierten Theorie nicht gewährleistet ist. Allerdings hat es den großen Vorteil, daß nur physikalische Moden quantisiert werden und so keine unphysikalischen Zustände entstehen. Außerdem ist das Prinzip des Verfahrens relativ einfach, die Anwendung kann aber z.B. bei nichtabelschen Eichtheorien sehr kompliziert werden.
2. *Pfadintegral-Quantisierung*: Diese Verfahren ist sehr elegant und ziemlich allgemein. Es handelt sich um eine sehr intuitive Formulierung, die dazu noch mit vielen anderen Quantisierungsverfahren zusammenhängt. Die Pfadintegral-Quantisierung hat allerdings den Nachteil, daß die auftretenden Funktionalintegrale mathematisch manchmal etwas heikel sind.
3. *Gupta-Bleuler-Quantisierung*: Dieses Verfahren ist auch als *kovariante Quantisierung* bekannt. Im Gegensatz zur kanonischen Quantisierung erhält es die Lorentz-Invarianz der klassischen Theorie. Allerdings werden häufig unphysikalische Zustände mit negativer Norm erzeugt. Diese bezeichnet man auch als “Geister” oder “Ghosts”.

4. *BRST-Quantisierung*: Diese Methode ist benannt nach den Physikern Becchi, Rouet, Stora und Tyutin. Es ist das wichtigste Quantisierungsverfahren für Eichtheorien, erzeugt aber auch Ghost-Zustände. Es besteht ein enger Zusammenhang mit der Pfadintegral-Quantisierung.

Das physikalisch relevanteste Beispiel für ein quantisiertes Feld ist sicherlich das elektromagnetische Feld. Bevor wir dieses im nächsten Abschnitt untersuchen werden, wollen wir u.a. als eine Art Vorüberlegung das einfachere Klein-Gordon-Feld quantisieren. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse kommen uns später zu Gute. Das EM-Feld ist ja ein Vektorfeld, das der Klein-Gordon-Gleichung genügt.

Wir betrachten daher ein reelles Skalarfeld ϕ , das der freien Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \quad (\text{II.3.1})$$

genügt, wobei bekanntlich $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ und x die Vierer-Koordinate ist. Die Gleichung (II.3.1) beschreibt für reelles ϕ ein neutrales Teilchen mit Spin 0. Den Fall einer komplexen Wellenfunktion, die geladene Teilchen beschreibt (siehe Kap. I.3.3), birgt zusätzliche Schwierigkeiten. Wir werden ihn später behandeln. Es so außerdem an die Lorentz-Invarianz der Gleichung erinnert: Unter Lorentz-Transformationen $x' = \Lambda x$ transformiert sich die Wellenfunktion gemäß $\phi'(x') = \phi(x)$.

Wir treffen nun die in der Feldtheorie übliche Konvention und setzen $\hbar = c = 1$. Damit ist z.B. $x^0 = ct \rightarrow t$, $mc^2 \rightarrow m$ etc. Die freie Klein-Gordon-Gleichung lautet dann

$$\boxed{(\square + m^2) \phi(x) = 0}$$

Ist speziell $\nabla^2 \phi = 0$, so vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -m^2 \phi.$$

In diesem Fall reduziert sich die Klein-Gordon-Gleichung auf die Gleichung eines harmonischen Oszillators.

Im folgenden wollen wir nun von einem reellen Feld $\phi(x)$ ausgehen. In diesem Fall können wir $\phi(x) = \phi(\vec{r}, t)$ als Auslenkung einer schwingenden Saite am Ort \vec{r} zur Zeit t interpretieren.

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} q_{\vec{k}}(t). \quad q_{\vec{k}}^* = q_{-\vec{k}}. \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad \text{mit } n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\boxed{\ddot{q}_{\vec{k}} + (k^2 + m^2)q_{\vec{k}} = 0}$$

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{k^2 + m^2} \quad \ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0.$$

Hamiltonsche Formulierung: wir setzen $\dot{q}_k = p_{-k}$ und $\dot{p}_{-k} = -\omega_k^2 q_k$,

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ und $\dot{p}_{-k} = -\frac{\partial H}{\partial q_{-k}}$.

$$H = \sum_k \frac{1}{2} (p_k p_{-k} + \omega_k^2 q_k q_{-k})$$

Wir führen nun die Größen

$$b_k := \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [\omega_k q_k + i p_{-k}], \quad b_k^* := \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [\omega_k q_{-k} - i p_k]$$

ein, mit denen sich die kanonischen Koordinaten und Impulse gemäß

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (b_k + b_{-k}^*), \quad p_{-k} = -i \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (b_k - b_{-k}^*)$$

ausdrücken lassen. Setzt man dies in die Energiefunktion ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
H &= \sum_k \frac{1}{2} \left[-\frac{\omega_k}{2} (b_k - b_{-k}^*)(b_{-k} - b_k^*) + \frac{\omega_k}{2} (b_k + b_{-k}^*)(b_{-k} + b_k^*) \right] \\
&= \sum_k \frac{\omega_k}{2} [b_k b_k^* + b_{-k}^* b_{-k}] \\
&= \sum_k \omega_k b_k^* b_k.
\end{aligned}$$

Quantisierung analog zum harmonischen Oszillator:
 Kanonisch konjugierte Größen q_k und p_k werden zu Operatoren mit:

$$[q_k, p_{k'}] = i\delta_{k,k'}, \quad [q_k, q_{k'}] = [p_k, p_{k'}] = 0.$$

$$\square \quad [b_k, b_{k'}^+] = \delta_{k,k'}, \quad [b_k, b_{k'}] = [b_k^+, b_{k'}^+] = 0$$

Einsetzen von $q_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} (b_{\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^*)$ in $\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} q_{\vec{k}}(t)$.

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} [b_{\vec{k}}(t) + b_{-\vec{k}}^+(t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} b_{\vec{k}}(t) + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} b_{\vec{k}}^+(t) \right].\end{aligned}$$

$$b_{\vec{k}}(t) = e^{iHt} b_{\vec{k}}(0) e^{-iHt} \quad i \frac{\partial b_{\vec{k}}}{\partial t} = i \dot{b}_{\vec{k}} = [b_{\vec{k}}, H] = \omega_{\vec{k}} [b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}}] = \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}}.$$

$$b_{\vec{k}}(t) = b_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \quad \text{mit } b_{\vec{k}} := b_{\vec{k}}(0). \quad b_{\vec{k}}^+(t) = b_{\vec{k}}^+ e^{i\omega_{\vec{k}} t}.$$

Somit erhalten wir für das quantisierte Feld die Darstellung

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[b_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} + h.c. \right]$$

Vakuumerwartungswerte (vgl. Übg.):

$$\langle 0|\phi|0\rangle = 0$$

$$\langle 0|\phi^2|0\rangle \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\sqrt{k^2 + m^2}}, \quad \text{divergiert}$$

Normalordnungsoperator lässt (viele) Vakuumerwartungswerte verschwinden

$$: b_k b_{k'}^+ : = b_{k'}^+ b_k, \quad : b_{k'}^+ b_k : = b_{k'}^+ b_k \quad \text{etc.}$$

Zur Mikrokausalität (vgl. Übg.):

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} b_k(t) + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} b_k^+(t) \right]$$

$$b_k(t) = e^{iHt} b_k(0) e^{-iHt} = b_k e^{-i\omega_k t}$$

$$\left[\phi(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}', t') \right] = \frac{1}{V} \sum_{k, k'} \frac{1}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left[b_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + b_k^+ e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)}, b_{k'} e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega_{k'} t')} + b_{k'}^+ e^{-i(\vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega_{k'} t')} \right]$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{1}{2\omega_k} \left(e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega_k(t - t')} - c.c. \right)$$

$$= \frac{2i}{(2\pi)^3} \text{Im} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\omega_k} \int d\Omega e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega_k(t - t')}$$

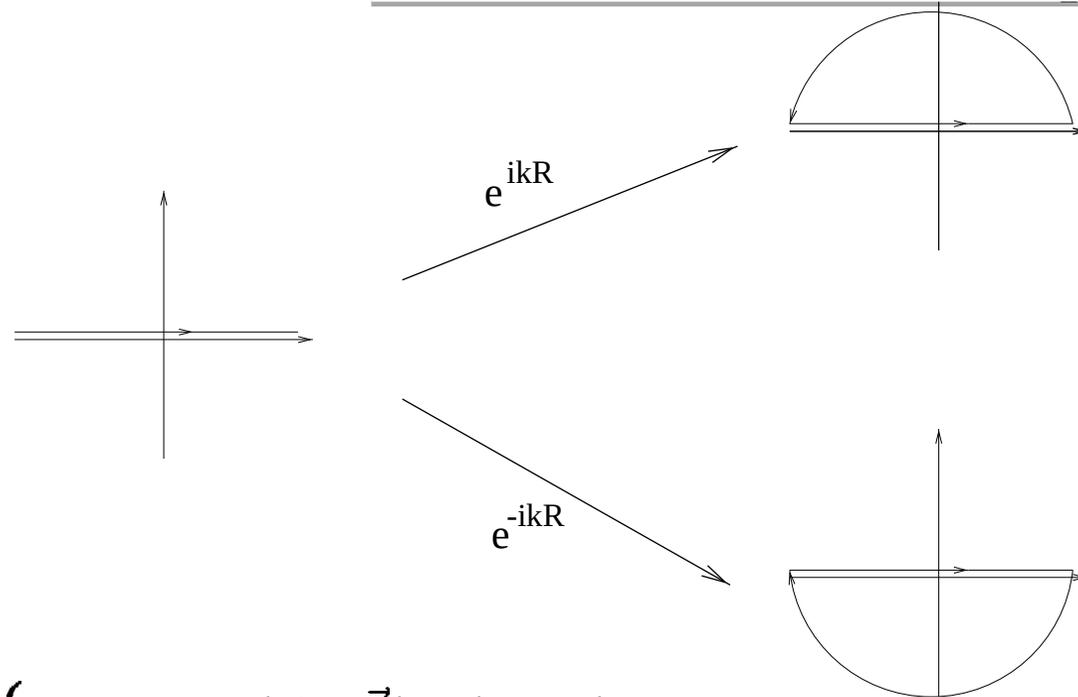
$$\int d\Omega e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{r}')} = 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta e^{ikR \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{4\pi}{kR} \sin kR.$$

$$= -\frac{i}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \sin \sqrt{k^2 + m^2} T \cdot \sin kR$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^\infty k \frac{\sin \sqrt{k^2 + m^2} T}{\sqrt{k^2 + m^2}} (e^{ikR} - e^{-ikR}) dk.$$

$$\left[\phi(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}', t') \right] = -\frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\sin \sqrt{k^2 + m^2} T}{\sqrt{k^2 + m^2}} (e^{ikR} - e^{-ikR}) dk.$$

Zunächst sehen wir, daß sich $\sin \sqrt{k^2 + m^2} T$ für $|\vec{k}| \rightarrow \infty$ verhält wie e^{ikT} . Daraus folgt, daß für $R > |T|$ e^{ikR} in der oberen komplexen Halbebene stärker gegen Null geht, als $\sin \sqrt{k^2 + m^2} T$ divergieren kann. Entsprechendes gilt für e^{-ikR} in der unteren komplexen Halbebene.



$$\left[\phi(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}', t') \right] = \begin{cases} = 0 & \text{für } |\vec{r} - \vec{r}'| > |t - t'| \\ \neq 0 & \text{für } |\vec{r} - \vec{r}'| \leq |t - t'|. \end{cases}$$

$$\left[\phi(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}', t') \right] = \begin{cases} = 0 & \text{für } |\vec{r} - \vec{r}'| > |t - t'| \\ \neq 0 & \text{für } |\vec{r} - \vec{r}'| \leq |t - t'|. \end{cases}$$

Dieses Ergebnis kann nun folgendermaßen interpretiert werden. $\phi(\vec{r}, t)$ ist als Feldamplitude eine physikalische Größe. Wenn der Kommutator in (II.3.41) verschwindet, sind die beiden Größen kompatibel miteinander: Wenn $\phi(\vec{r}, t)$ exakt meßbar ist, so auch $\phi(\vec{r}', t')$. Dies gilt genau dann, wenn $|\vec{r} - \vec{r}'| > |t - t'|$, also für Abstände $|\vec{r} - \vec{r}'|$, die in der Zeit $|t - t'|$ nicht durch ein Signal miteinander verknüpft werden können. Die Tatsache, daß der Kommutator für raumartige Abstände der Ereignisse (\vec{r}, t) und (\vec{r}', t') verschwindet, hängt also eng mit der *Kausalität* zusammen.

Hier können wir nun klären, warum wir bei der Quantisierung bosonische Erzeuger und Vernichter eingeführt haben. Verwendet man nämlich Fermionen, d.h. $\{b_k, b_{k'}^+\} = 1$ etc., anstelle von $[b_k, b_{k'}^+] = 1$, so wäre $\left[\phi(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}', t') \right] \neq 0$ für alle (\vec{r}, t) und (\vec{r}', t') und die Kausalität wäre nicht gewährleistet.

Wir sehen also, daß Fermi-Statistik im Falle der Klein-Gordon-Gleichung unverträglich mit der Kausalitätsforderung ist. Diese ist ein wesentlicher Baustein für das Spin-Statistik-Theorem. Generell kann man sagen, daß für Klein-Gordon-artige Gleichungen für Teilchen mit Spin $0, 1, 2, \dots$ auf Grund der Kausalität die Bosestatistik erzwungen wird. _____

Wir wollen nun den Impuls \vec{P} des quantisierten Feldes bestimmen. Dazu müssen wir sein Verhalten unter Translationen

$$T(\vec{a})\phi(\vec{r})T^{-1}(\vec{a}) = \phi(\vec{r} + \vec{a}) \quad \text{mit} \quad T(\vec{a}) = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}} \quad (\text{II.3.33})$$

genauer untersuchen. Ist \vec{a} infinitesimal, so können wir $T(\vec{a}) = 1 - i\vec{P}\cdot\vec{a}$ schreiben. Entwickeln wir auch $\phi(\vec{r} + \vec{a})$ nach Taylor bis 1. Ordnung, so folgt

$$\left(1 - i\vec{P}\cdot\vec{a}\right)\phi(\vec{r})\left(1 + i\vec{P}\cdot\vec{a}\right) = \phi(\vec{r}) + \vec{\nabla}\phi(\vec{r})\cdot\vec{a} + O(a^2)$$

und hieraus

$$-i\left[\vec{P}, \phi(\vec{r})\right] = \vec{\nabla}\phi(\vec{r}).$$

Setzen wir das quantisierte Feld ein, so erhalten wir

$$-[\vec{P}, b_{\vec{k}}] = \vec{k}b_{\vec{k}}.$$

Dies legt die Form des Impulsoperators bis auf eine additive Konstante fest:

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \vec{k}b_{\vec{k}}^+b_{\vec{k}}.$$

Alternative Quantisierung (im Skript)

- 1) Feldoperatoren erfüllen KG-Gleichung
- 2) Viererimpuls der Feldoperatoren
- 3) Mikrokausalität

-> Bose-Vertauschungsrelationen der Erzeuger & Vernichter

Klassische Observable einer neutralen Mesonenwelle ist eine skalare reelle Feldfunktion

$$\psi(x) = \psi^*(x)$$

genügt $(\square + m^2)\psi(x) = 0$

Lösungen $\psi(x) = e^{i(k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ mit $k^0 = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$

Zwei Typen von Lösungen: $\omega := \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$

$$\psi_+(x) = e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$$

$$\psi_-(x) = e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$$

Ansatz für allgemeine Lösungen:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \left(e^{ikx} \alpha^*(\mathbf{k}) + e^{-ikx} \alpha(\mathbf{k}) \right) \quad (**)$$

wobei

$$k = (\omega, \mathbf{k}), \quad kx = k^\mu x_\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$$

Quantisierung: Dem Mesonenfeld wird ein Feldoperator $\Phi(x)$ zugeordnet.

Annahme I:

$$\Phi(x) = \Phi^\dagger(x) \quad (\text{hermitesch})$$

$$(\square + m^2) \Phi(x) = 0$$

Impuls und Energie beobachtbar \rightsquigarrow hermitescher Operator. Wegen relativistischer Invarianz zusammengefaßt im Vierervektor-Operator

$$\hat{p} = (\hat{p}^\mu) = (\hat{H}, \hat{\mathbf{p}})$$

($\hat{p}^0 =$ Energieoperator = Hamiltonoperator \hat{H})

Wegen Energie-Impulserhaltung \hat{p}^μ zeitunabhängig.

Im Heisenbergbild gilt für beliebigen Operator $\hat{A}(t, \mathbf{x})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t, \mathbf{x}) &= i [\hat{H}, \hat{A}(t, \mathbf{x})] \\ \frac{\partial}{\partial x^j} \hat{A}(t, \mathbf{x}) &= -i [\hat{p}^j, \hat{A}(t, \mathbf{x})], \quad j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

Annahme II:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi(x) = i [\hat{p}_\mu, \Phi(x)] \quad (***)$$

Annahme I und II liefern Teilcheninterpretationen des Mesonenfeldes.

Analog zu (**)

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \left(e^{ikx} \hat{a}^+(\mathbf{k}) + e^{-ikx} \hat{a}(\mathbf{k}) \right)$$

Wegen (***) folgt

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left(e^{ikx} i k_\mu \hat{a}^+(\mathbf{k}) + e^{-ikx} (-i k_\mu) \hat{a}(\mathbf{k}) \right) \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left(e^{ikx} [\hat{p}_\mu, \hat{a}^+(\mathbf{k})] + e^{-ikx} [\hat{p}_\mu, \hat{a}(\mathbf{k})] \right) \end{aligned}$$

$$\text{also } [\hat{p}_\mu, \hat{a}^+(\mathbf{k})] = k_\mu \hat{a}(\mathbf{k}) \text{ und } [\hat{p}_\mu, \hat{a}(\mathbf{k})] = -k_\mu \hat{a}(\mathbf{k}) \quad (\#)$$

Definition: $|0\rangle = \text{Vakuum}$ (kein Teilchen vorhanden), $\langle 0|0\rangle = 1$

Es ist $\hat{p}_\mu |0\rangle = 0$ also

$$[\hat{p}^\mu, \hat{a}^+(\mathbf{k})] |0\rangle = k^\mu \hat{a}^+(\mathbf{k}) |0\rangle \implies \hat{p}^\mu \hat{a}^+(\mathbf{k}) |0\rangle = k^\mu \hat{a}^+(\mathbf{k}) |0\rangle$$

\implies $| \mathbf{k} \rangle = \hat{a}^+(\mathbf{k}) |0\rangle$ ist Eigenzustand des Energie- und Impulsoperators mit Eigenwert $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$. Wir identifizieren diesen Zustand als **Ein-Meson-Zustand** mit scharfer Energie ω und scharfem Impuls \mathbf{k} .

Wegen $\hat{p}^\mu \hat{a}(\mathbf{k}) |0\rangle = -k^\mu \hat{a}(\mathbf{k}) |0\rangle$ wäre $\hat{a}(\mathbf{k}) |0\rangle$ ein Zustand mit negativer Energie.

\implies Wir fordern $\hat{a}(\mathbf{k}) |0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}$

Analog für Zustand $|p\rangle$ mit $\hat{p}^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle$, d.h. Eigenzustand des Vierer-Impulses folgt mit (#)

$$\hat{p}^\mu \hat{a}^+(\mathbf{k}) |p\rangle = (p^\mu + k^\mu) \hat{a}^+(\mathbf{k}) |p\rangle$$

$$\hat{p}^\mu \hat{a}(\mathbf{k}) |p\rangle = (p^\mu - k^\mu) \hat{a}(\mathbf{k}) |p\rangle$$

$$\hat{p}^\mu \hat{a}^+(\mathbf{k}_1) \hat{a}^+(\mathbf{k}_2) |0\rangle = (k_1^\mu + k_2^\mu) \underbrace{\hat{a}^+(\mathbf{k}_1) \hat{a}^+(\mathbf{k}_2)}_{\text{Interpret. Zustand}} |0\rangle$$

Interpret. Zustand

mit zwei Mesonen

Analog n -Mesonenzustände.

\hat{a}^+ heißen Erzeuger, \hat{a} Vernichter.

Wir wissen noch nichts über die Norm von Zuständen mit einem oder mehreren Mesonen. Wir brauchen eine weitere physikalische Annahme.

Betrachte Messung des Mesonenfeldes an zwei verschiedenen Raum-Zeit-Punkten x, y . Für $(x - y)^2 < 0$ liegt x außerhalb des Vorwärtslichtkegels von y und umgekehrt.

\implies Kein Signal von der Messung an Punkt x kann y erreichen und umgekehrt.

Annahme III:

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = 0 \text{ für } (x - y)^2 < 0 \quad (\text{Mikrokausalität})$$

Sei $x = (t, \mathbf{x}), y = (t', \mathbf{y})$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$$\implies [\Phi(t, \mathbf{x}), \Phi(t', \mathbf{y})] = 0 \text{ für } |t' - t| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 0$$

Insbesondere $[\Phi(t, \mathbf{x}), \Phi(t, \mathbf{y})] = 0$ und $[\Phi(t, \mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{y})] = 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Folgerung: Aus dieser Mikrokausalität folgt der *Bose-Charakter* der Mesonen!

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{-kx} \left(e^{-kx} \hat{a}^+(\mathbf{k}) + e^{-i\omega t} \hat{a}(-\mathbf{k}) \right)$$

$$\dot{\Phi}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} e^{-kx} \left(e^{-kx} \hat{a}^+(\mathbf{k}) - e^{-i\omega t} \hat{a}(-\mathbf{k}) \right)$$

Umkehrung der Fourier-Trafo liefert

$$\left. \begin{aligned} e^{i\omega t} \hat{a}^+(\mathbf{k}) + e^{-i\omega t} \hat{a}(-\mathbf{k}) &= 2\omega \int d^3x e^{ikx} \Phi(t, \mathbf{x}) \\ e^{i\omega t} \hat{a}^+(\mathbf{k}) - e^{-i\omega t} \hat{a}(-\mathbf{k}) &= -2i \int d^3x e^{ikx} \dot{\Phi}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \right\} (\times)$$

$$\begin{aligned} \implies & \left[e^{i\omega_1 t} \hat{a}^+(\mathbf{k}_1) + e^{-i\omega_1 t} \hat{a}(-\mathbf{k}_1), e^{i\omega_2 t} \hat{a}^+(\mathbf{k}_2) + e^{-i\omega_2 t} \hat{a}(-\mathbf{k}_2) \right] \\ &= 2\omega_1 \omega_2 \int d^3x d^3y e^{ik_1x} e^{ik_2y} \underbrace{[\Phi(t, \mathbf{x}), \Phi(t, \mathbf{y})]}_{=0 \text{ wg. Mikrokausalit\u00e4t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies & e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} [\hat{a}^+(\mathbf{k}_1), \hat{a}^+(\mathbf{k}_2)] - e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} [\hat{a}(-\mathbf{k}_2), \hat{a}^+(\mathbf{k}_1)] \\ &+ e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} [\hat{a}(\mathbf{k}_1), \hat{a}^+(\mathbf{k}_2)] - e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} [\hat{a}(-\mathbf{k}_1), \hat{a}(\mathbf{k}_2)] = 0 \end{aligned}$$

Damit dies f\u00fcr alle Zeiten gilt, folgt

$$\begin{aligned} [\hat{a}^+(\mathbf{k}_1), \hat{a}^+(\mathbf{k}_2)] &= 0 \\ [\hat{a}(\mathbf{k}_1), \hat{a}(\mathbf{k}_2)] &= 0 \end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$$

Dies bedeutet bereits, daß Mesonen Bose-Charakter haben.

Der Zusammenhang zwischen Mikrokausalität und dem Bose-Charakter der Mesonen gilt nicht nur für freie Felder, die wir hier betrachtet haben. Man kann ganz allgemein zeigen, daß die Mikrokausalität den Bose-Charakter aller Teilchen mit ganzzahligem Spin bedingt (Pauli 1936, 1940).

Betrachten wir nun den Kommutator von \hat{a} und \hat{a}^+ :

Wir lösen (\times) nach \hat{a}^+ und \hat{a} auf

$$\begin{aligned} \implies [\hat{a}(\mathbf{k}_1), \hat{a}^+(\mathbf{k}_2)] &= e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \int d^3x d^3y e^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}_2\mathbf{y}} \\ &\quad \cdot \left\{ i\omega_2 [\dot{\Phi}(t, \mathbf{x}), \Phi(t, \mathbf{y})] - i\omega_1 [\Phi(t, \mathbf{x}), \dot{\Phi}(t, \mathbf{y})] \right\} \end{aligned}$$

Der Integrand verschwindet für $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, muß also einen δ -Funktions-Beitrag für $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ haben, da ansonsten alle Erzeuger mit allen Vernichtern kommutieren und daher alle Zustände, die man durch Anwendung von Erzeugungsoperatoren auf das Vakuum erhält, gleich dem Nullvektor wären.

\rightsquigarrow Setzen

$$[\Phi(t, \mathbf{x}), \dot{\Phi}(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{Kanonische Vertauschungsregel}$$

\implies

$$[\hat{a}(\mathbf{k}_1), \hat{a}^+(\mathbf{k}_2)] = (2\pi)^3 2\omega_1 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

Lagrange-Formalismus, Kanonische Quantisierungsregeln

Betrachte klassisches Skalarfeld $\varphi(x)$.

Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu\varphi) = \frac{1}{2} \{ \partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) - m^2\varphi^2(x) \} \quad (*)$$

Wirkungsfunktional

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int dx \mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu\varphi)$$

Prinzip der stationären Wirkung:

$$\delta\mathcal{S}[\varphi] = 0$$

für die wirklich vorkommenden Felder (führt auf die Feldgleichung).

$$\delta\mathcal{S}[\varphi] = \int dx \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu\varphi)}{\partial(\partial_\nu\varphi(x))} \partial_\nu\delta\varphi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu\varphi)}{\partial\varphi(x)} \delta\varphi(x) \right\}$$

Partielle Integration im ersten Term, Randterme weglassen, da nach Voraussetzung $\partial\varphi(x)$ im Unendlichen verschwindet.

$$\delta\mathcal{S}[\varphi] = \int dx \left\{ -\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu\varphi)}{\partial(\partial_\nu\varphi(x))} + \frac{\partial\mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu\varphi)}{\partial\varphi(x)} \right\} \delta\varphi(x) = 0$$

Da für endliche x die Variation des Feldes $\delta\varphi(x)$ ganz beliebig war, folgt **Euler-Lagrange Gleichung**

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial (\partial_\nu \varphi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial \varphi(x)} = 0$$

bzw.

$$\partial_\nu \partial^\nu \varphi(x) + m^2 \varphi(x) = 0$$

Zur *Quantisierung* einer Theorie (wie oben) mit Skalarfeldern $\varphi_j (j = 1, \dots, N)$ und Ladungsdichte $\mathcal{L}(x, \varphi_j, \partial_\mu \varphi_j)$ als Integral der Lagrange-Dichte über $t = \text{const.}$

$$L[t, \varphi_j, \dot{\varphi}_j] = \int_{t=\text{const.}} d^3x \mathcal{L}(x, \varphi_j, \partial_\mu \varphi_j)$$

L betrachten wir als Funktion bzw. Funktional von t , $\varphi_j(\mathbf{x}, t)$ und $\dot{\varphi}_j(\mathbf{x}, t)$.

Kanonisch Konjugierte Impulse:

$$\Pi_k(\mathbf{x}, t) = \frac{L[t, \varphi_j, \dot{\varphi}_j]}{\delta \dot{\varphi}_k(\mathbf{x}, t)} \quad (k = 1, \dots, N)$$

Nun muß man wie in der Mechanik voraussetzen, daß diese Beziehungen nach $\dot{\varphi}_j$ auflösbar sind, d.h. daß es Umkehrfunktionale F_j gibt:

$$\dot{\varphi}_j = F_j[t, \varphi, \Pi]$$

Es bilden dann $\varphi_j(\mathbf{x}, t)$ und $\Pi_k(\mathbf{x}, t)$ zu jeder Zeit t ein vollständiges System dynamischer Variablen.

Hamilton-Funktion:

$$H[t, \varphi, \Pi] = \int d^3x \Pi_j \dot{\varphi}_j - L$$

Übergang zur Quantentheorie: Betrachten φ_j und Π_k als Feldoperatoren, für die wir die kanonischen Vertauschungsregeln postulieren, die für alle Zeiten gelten sollen:

$$\begin{aligned} [\varphi_j(\mathbf{x}, t), \varphi_k(\mathbf{y}, t)] &= 0 \\ [\Pi_j(\mathbf{x}, t), \Pi_k(\mathbf{y}, t)] &= 0 && (j, k = 1, \dots, k) \\ [\varphi_j(\mathbf{x}, t), \Pi_k(\mathbf{y}, t)] &= i\delta_{jk}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Für das freie Skalarfeld mit Lagrange-Dichte wie in (*) liefert die kanonische Quantisierung genau das quantisierte Feld wie im vorigen Abschnitt besprochen, und die Hamiltonfunktion ist $H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right]$.

Bemerkung:

Für die Eichtheorien, die heute die Teilchenphysik beherrschen, ist die kanonische Quantisierung nur in speziellen Eichungen durchführbar (vgl. Quantisierung des elektromagnetischen Feldes).

Quantisierung des Dirac-Feldes

Wir betrachten nun den Dirac-Spinor als Feldoperator. Wie beim Mesonenfeld entwickeln wir den Feldoperator nach ebenen Wellen, wobei die Entwicklungskoeffizienten Operatoren sein werden, d.h. wir ersetzen in der Fourierentwicklung $\alpha_s(\mathbf{p}) \rightarrow \hat{a}_s(\mathbf{p})$, $\beta_s^*(\mathbf{p}) \rightarrow \hat{b}_s^+(\mathbf{p})$.

$$\rightsquigarrow \psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left\{ e^{ipx} v_s(p) \hat{b}_s^+(\mathbf{p}) + e^{-ipx} u_s(p) \hat{a}_s(\mathbf{p}) \right\}$$

Die Natur der Operatoren \hat{a} und \hat{b}^+ ist zu klären.

Wir fordern wieder die Gültigkeit der Heisenberg-Gleichung:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} = i [\hat{p}_\mu, \psi(x)]$$

Wie beim Mesonenfeld folgt

$$\begin{aligned} [\hat{p}_\mu, \hat{a}_s^+(\mathbf{p})] &= p_\mu \hat{a}_s^+(\mathbf{p}) \\ [\hat{p}_\mu, \hat{b}_s^+(\mathbf{p})] &= p_\mu \hat{b}_s^+(\mathbf{p}) \\ [\hat{p}_\mu, \hat{a}_s(\mathbf{p})] &= -p_\mu \hat{a}_s(\mathbf{p}) \\ [\hat{p}_\mu, \hat{b}_s(\mathbf{p})] &= -p_\mu \hat{b}_s(\mathbf{p}) \\ &\left(s = \pm \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Auch für die Operatoren \hat{a} und \hat{b} müssen wir fordern:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s(\mathbf{p})|0\rangle &= 0 \\ \hat{b}_s(\mathbf{p})|0\rangle &= 0 \end{aligned}$$

An Stelle eines Satzes von Erzeugungsoperatoren haben wir vier. Entsprechend können wir zu jedem festen Impuls \mathbf{p} vier Ein-Teilchen-Zustände aufbauen:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \hat{a}_s^+(\mathbf{p})|0\rangle, \\ \text{(b)} \quad & \hat{b}_s^+(\mathbf{p})|0\rangle, \quad s = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Zustände (a) entsprechen einem Elektron mit festem Impuls \mathbf{p} und den zwei linear unabhängigen Spinzuständen. Nehmen wir die Theorie ernst, dann müssen wir fordern, daß es ein weiteres Teilchen mit exakt gleicher Masse gibt (DIRAC 1930, OPPENHEIM 1930). Dies wurde durch die Entdeckung des Positrons (ANDERSSON 1932, 1933) bestätigt. (b) identifizieren wir mit Positronen, und wir werden sehen, daß in der Dirac-Theorie Elektronen und Positronen automatisch umgekehrte Ladung haben.

Zur Algebra der Erzeugungs- und Vernichtungsfelder:

Falls wir dieselben Vertauschungsregeln wie beim Mesonen-Feld fordern

$$\begin{aligned} [\hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_s^+(\mathbf{p}')] &= \delta_{rs}(2\pi)^3 2p^0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ [\hat{b}_r(\mathbf{p}), \hat{b}_s^+(\mathbf{p}')] &= \delta_{rs}(2\pi)^3 2p^0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned}$$

und alle anderen Kommutatoren $= 0$ sind, finden wir *nichtverschwindende Kommutatoren für raumartige Abstände*: z.B.

$$[\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, t)] \neq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \quad (+)$$

im Widerspruch zur Mikrokausalität.

Man könnte argumentieren, daß der Dirac-Spinor sowieso nicht direkt beobachtbar ist. Aber aus (+) folgt auch eine Verletzung der Mikrokausalität für die bilinearen Ausdrücke im Dirac-Feldoperator, die wir mit beobachtbaren Feldern identifizieren wollen. \Rightarrow Elektronen können keine Bosonen sein (experimentell bestätigt, da sie dem Pauli-Prinzip genügen).

Die richtigen algebraischen Vertauschungsrelationen für die Erzeuger und Vernichter des Dirac-Feldes sind (JORDAN und WIGNER 1927, 1928) Antikommutatoren:

$$\begin{aligned}
 \{\hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_s^+(\mathbf{p}')\} &= \delta_{rs}(2\pi)^3 2p^0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\
 \{\hat{b}_r(\mathbf{p}), \hat{b}_s^+(\mathbf{p}')\} &= \delta_{rs}(2\pi)^3 2p^0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\
 \{\hat{a}_r^+(\mathbf{p}), \hat{a}_s^+(\mathbf{p}')\} &= \{\hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_s(\mathbf{p}')\} \\
 &= \{\hat{b}_r^+(\mathbf{p}), \hat{b}_s^+(\mathbf{p}')\} = \{\hat{b}_r(\mathbf{p}), \hat{b}_s(\mathbf{p}')\} \\
 &= \{\hat{a}_r^+(\mathbf{p}), \hat{b}_s(\mathbf{p}')\} = \{\hat{a}_r^+(\mathbf{p}), \hat{b}_s^+(\mathbf{p}')\} = 0
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{y}, t)\} = \{\bar{\psi}(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (*)$$

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, t)\} = \gamma^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (**)$$

Ad (**):

$$\begin{aligned}
\{\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, t)\} &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2p^0 2p'^0} \sum_{r,s} e^{ipx} e^{-ip'y} v_r(p) \bar{v}_s(p') \left\{ \hat{b}_r^+(\mathbf{p}), \hat{b}_s(\mathbf{p}') \right\} \\
&\quad + \sum_{r,s} e^{ipx} e^{-ip'y} u_r(p) \bar{u}_s(p') \left\{ \hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_s^+(\mathbf{p}') \right\} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \left(\underbrace{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \sum_s v_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p})}_{=p^0\gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - m} + e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \sum_s u_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p})}_{=p^0\gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} + m} \right) \\
&= \gamma_0 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\
&= \gamma_0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})
\end{aligned}$$

Für beobachtbare Felder $A(x) = \bar{\psi}(x)u\psi(x)$, $u = \bar{u}$ 4×4 - Matrix ergeben sich damit Vertauschungsregeln, die mit der Mikrokausalität im Einklang sind. Z.B. für beliebige 4×4 - Matrizen u_1, u_2 :

$$[\bar{\psi}(\mathbf{x}, t)u_1\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, t)u_2\psi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

Folgt sofort aus (*) und (**) mit der Identität (für beliebige Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$).

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] &= \hat{A} \{ \hat{B}, \hat{C} \} \hat{D} - \hat{A}\hat{C} \{ \hat{B}, \hat{D} \} \\ &\quad - \hat{C} \{ \hat{A}, \hat{D} \} \hat{B} + \{ \hat{C}, \hat{A} \} \hat{D}\hat{B} \end{aligned} \quad (\text{Übung})$$

Ein-Elektron (Positron)-Zustände mit scharfem Impuls:

$$\begin{aligned} |e^-(\mathbf{p}, s)\rangle &= \hat{a}_s^+(\mathbf{p}) |0\rangle \\ |e^+(\mathbf{p}, s)\rangle &= \hat{b}_s^+(\mathbf{p}) |0\rangle \end{aligned}$$

Normierung:

$$\begin{aligned} \langle e^-(\mathbf{p}, s) | e^-(\mathbf{p}, s) \rangle &= \langle 0 | \{ \hat{a}_r(\mathbf{p}'), \hat{a}_s^+(\mathbf{p}) \} | 0 \rangle = \delta_{rs} (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ \langle e^+(\mathbf{p}, s) | e^+(\mathbf{p}, s) \rangle &= \langle 0 | \{ \hat{b}_r(\mathbf{p}'), \hat{b}_s^+(\mathbf{p}) \} | 0 \rangle = \delta_{rs} (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Zwei-Elektronen-Zustand:

$$\begin{aligned} |e^-(\mathbf{p}_1, s), e^-(\mathbf{p}_2, s)\rangle &= \hat{a}_r^+(\mathbf{p}_1) \hat{a}_s^+(\mathbf{p}_2) |0\rangle \\ &= -\hat{a}_s^+(\mathbf{p}_2) \hat{a}_r^+(\mathbf{p}_1) |0\rangle = -|e^-(\mathbf{p}_2, s), e^-(\mathbf{p}_1, s)\rangle \end{aligned}$$