Quantenmechanik II

Quantenelektrodynamik

Heiko Rieger
SS2017

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes – Lorentz-kovariante Formulierung

In der Lorentz-Eichung $\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$ genügt das Vierepotential ($A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$) im Quell-freien Fall ($\rho = 0$, $j^\mu = 0$) der d'Alembert Gleichung

$$\boxed{\Box A_\mu = 0}$$

$\Rightarrow$ Fourier-Entwicklung für die Feldoperatoren A_μ (wie bei Mesonen)

$$A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{ikx} a_\mu^+(\mathbf{k}) + e^{-ikx} a_\mu(\mathbf{k}) \right\}$$

mit

$$k = \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad \omega = |\mathbf{k}|, \quad kx = k^\mu x_\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$$

Mikrokausalität erfordert Bose-Vertauschungs-Relationen

$$\begin{aligned}
\left[a_\mu^+(\mathbf{k}),\ a^+(\mathbf{k}')\right] &= 0 \\
\left[a_\mu(\mathbf{k}),\ a_\nu(\mathbf{k})\right] &= 0 \\
\left[a_\mu(\mathbf{k}),\ a_\nu^+(\mathbf{k}')\right] &= Z_{\mu\nu}(2\pi)^3 2\omega\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\end{aligned}$$

mit zunächst noch unbekannten $Z_{\mu\nu}$.

a, a^+ wirken im Fock-Raum, für das Vakuum gilt

$$a_\mu(\mathbf{k})|\,0\,\rangle = 0 \qquad \forall\mu,\mathbf{k}$$

Falls wir explizite Lorentz-Kovarianz der Theorie wollen, muß $Z_{\mu\nu}$ ein konstanter Tensor zweiter Stufe sein. Der einzige solche Tensor ist $g_{\mu\nu}$. Nach eventueller Reskalierung muß also $Z_{\mu\nu} = \pm g_{\mu\nu}$, die richtige Wahl (s.u.) ist

$$\left[a_\mu(\mathbf{k}),\ a_\nu^+(\mathbf{k}')\right] = -g_{\mu\nu}(2\pi)^3 2\omega\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

die Operatoren a_j^+ $(j = 1,2,3)$ angewandt auf das Vakuum führen zu Zuständen mit positiver Norm, a_0^+ zu Zuständen negativer Norm.

Betrachte allgemeinen Zustand $|\, f\,\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}} \sum_\mu f_\mu(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k})\,|\,0\,\rangle$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \langle\, f \,|\, f\,\rangle &= \int \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^6\sqrt{2\omega 2\omega'}} \sum_{\mu,\nu} f^*_\nu(\mathbf{k}') f_\mu(\mathbf{k})\, \langle 0|\, a_\nu(\mathbf{k}') a^+_\mu(\mathbf{k})\,|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_\mu \pm |f_\mu(\mathbf{k})|^2 \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{für} \quad f_0 = 0 \\ < 0 & \text{für} \quad f_0 > 0,\ f_{1,2,3} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Neben Zuständen mit negativer Norm treten Zustände

$$|\mathbf{k}, \varepsilon\rangle = -\varepsilon^\mu a^+_\mu(\mathbf{k})\,|0\rangle$$

mit beliebiger Vierer-Polarisationsrichtung ε auf, so daß wir *vier* linear unabhängige Polarisationsrichtungen zu festem $\mathbf{k}$ statt nur 2 experimentell beobachteten.

Das Verfahren von Gupta und Bleuler (1950) garantiert positive Norm und wird die 2 unerwünschten Polarisationsrichtungen los: Lorentz-Bedingung muß als Nebenbedingung für *Zustände* gefordert werden.

Nur einen Teil der Zustandsvektoren im Fock-Raum erklären wir für physikalisch, und zwar gerade diejenigen, die in gewisser Weise die Lorentz-Bedingung erfüllen. Wir nehmen den Teil von A_μ, der nur Vernichter enthält:

$$A_\mu^{(-)}(x) := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, e^{-ikx} a_\mu(\mathbf{k})$$

und fordern für physikalische Zustandsvektoren bzw.

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu^{(-)}(x)\ |\text{phys. Zust.}\rangle &= 0 \\ k^\mu a_\mu(x)\ |\text{phys. Zust.}\rangle &= 0 \qquad \forall\, \mathbf{k} \end{aligned}$$

Hiermit $\langle \text{phys. Zust.}|\, \partial^\mu A_\mu^{(-)}(x)\ |\text{phys. Zust.}\rangle = 0$ d.h. der *Erwartungswert* der Divergenz des Feldes A_μ verschwindet für beliebige physikalische Zustände. Unterraum $\{|\,\text{phys. Zust.}\rangle\}$ ist offenbar ein linearer Raum.

Behauptung:

$$\langle \text{phys. Zust.} \,|\, \text{phys. Zust.} \rangle \geq 0$$

d.h. der Raum hat positiv *semi*-definite Metrik.

Beweis:

Wir wählen neue Basis für Erzeuger und Vernichter: Betrachte die Operatoren $a_\mu^+(\mathbf{k})$ für festes $\mathbf{k}$. Wähle zwei Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{k}$, so daß $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3 := \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ orthonormales Dreibein $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

Definition:

$$\begin{aligned}
\alpha_0^+(\mathbf{k}) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0^+(\mathbf{k}) - \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}^+(\mathbf{k})\right) \\
\alpha_1^+(\mathbf{k}) &:= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}^+(\mathbf{k}) \\
\alpha_2^+(\mathbf{k}) &:= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a}^+(\mathbf{k}) \\
\alpha_3^+(\mathbf{k}) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0^+(\mathbf{k}) + \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}^+(\mathbf{k})\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^+ = \left(a_1^+,\ a_2^+,\ a_3^+\right)$$

$\rightsquigarrow$ Vertauschungsrelationen

$$
\begin{array}{rcl}
\left[\alpha_0(\mathbf{k}),\, \alpha_0^+(\mathbf{k}')\right] &=& \left[\alpha_3(\mathbf{k}),\, \alpha_3^+(\mathbf{k}')\right] = 0 \\
\left[\alpha_0(\mathbf{k}),\, \alpha_3^+(\mathbf{k}')\right] &=& \left[\alpha_3(\mathbf{k}),\, \alpha_0^+(\mathbf{k}')\right] = -(2\pi)^3 2\omega\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
\left[\alpha_1(\mathbf{k}),\, \alpha_1^+(\mathbf{k}')\right] &=& \left[\alpha_2(\mathbf{k}),\, \alpha_2^+(\mathbf{k}')\right] = (2\pi)^3 2\omega\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\end{array}
\qquad (*)
$$

alle anderen verschwinden.

Die Nebenbedingung $k^\mu a_\mu(\mathbf{k})|\text{phys. Zust.}\rangle = 0$ lautet dann einfach

$$
\alpha_0|\text{phys. Zust.}\rangle = 0 \qquad (**)
$$

Betrachte einen Zustandsvektor im Hilbertraum der Gestalt

$$
\alpha_1^+(\mathbf{k}_1)\alpha_1^+(\mathbf{k}_2)\cdots\alpha_2^+\cdots\alpha_0^+\cdots\alpha_3^+\cdots|\,0\,\rangle \qquad (+)
$$

d.h. beliebiges Produkt von Erzeugern angewandt auf Vakuum. Wegen der Kommutatorrel. $(*)$ kann $(**)$ dann und nur dann erfüllt sein, wenn kein Operator a_3^+ vorkommt! Z.B. sind unter $\alpha_\mu^+(\mathbf{k})|\,0\,\rangle$ nur $\alpha_1^+(\mathbf{k})|\,0\,\rangle$ und $\alpha_2^+(\mathbf{k})|\,0\,\rangle$ phys.. Diese sind orthogonal und ihre Längenquadrate größer gleich Null

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\, \alpha_1(\mathbf{k})\alpha_1^+(\mathbf{k})\, |0\rangle &= (2\pi)^3 2\omega\, \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
\langle 0|\, \alpha_2(\mathbf{k})\alpha_2^+(\mathbf{k})\, |0\rangle &= (2\pi)^3 2\omega\, \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
\langle 0|\, \alpha_0(\mathbf{k})\alpha_0^+(\mathbf{k})\, |0\rangle &= 0
\end{aligned}
\qquad (++)
$$

Ein beliebiger physikalischer Zustandsvektor ist eine Linearkombination von Zustandsvektoren der Gestalt (+), die *kein* α_3^+ enthalten. Für diese zeigt man dann leicht (in Verallgemeinerung von (++)), daß kein Längenquadrat größer gleich Null ist. ■

Man gelangt von hier leicht zu einem Hilbert-Raum mit positiv-definiter Metrik: (dann Wahrscheinlichkeitsinterpretation im Sinne der QM zuläßt).

Definition: **Äquivalenzklassen von Zustandsvektoren**:

$$
|\,1\,\rangle \sim |\,2\,\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad (\langle\,1\,| - \langle\,2\,|)\,(|\,1\,\rangle - |\,2\,\rangle) = 0
$$

Der lineare Hilbertraum der Äquivalenzklassen hat dann positiv-definite Metrik.

Physikalische Interpretation:
Zustand eines Systems von Photonen wird durch eine ganze Klasse von äquivalenten Zustandsvektoren beschrieben. Man kann zeigen, daß der Erwartungswert von *beobachtbaren* Größen (wie Feldstärketensor, Energie etc.) identisch ist für äquivalente Zustandsvektoren. In der Praxis, z.B. bei der Berechung von Matrixelementen, kann man daher stets einen beliebigen Vertreter aus einer Äquivalenzklasse als Zustandsvektor nehmen.

Da wegen $(**)$ $\alpha_0^+(\mathbf{k})|\,0\,\rangle$ dem Nullvektor entspricht, sind nur Linearkombinationen aus

$$|\mathbf{k},\varepsilon_1\rangle = \alpha_1^+(\mathbf{k})\,|\,0\,\rangle = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}^+(\mathbf{k})\;|\,0\,\rangle$$
$$|\mathbf{k},\varepsilon_2\rangle = \alpha_2^+(\mathbf{k})\,|\,0\,\rangle = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a}^+(\mathbf{k})\;|\,0\,\rangle$$

mit $\varepsilon_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_{1,2} \end{pmatrix}$

physikalische Ein-Photon-Zutände = experimentellen Befund von nur 2 lin. unabh. Ein-Photon-Zutände für jedes $\mathbf{k}$ physikalische Ein-Photon-Zutände zu festem $\mathbf{k}$:

$$|\mathbf{k},\varepsilon\rangle = -\varepsilon^\mu a_\mu^+(\mathbf{k})\,|\,0\,\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{a}^+(\mathbf{k})\,|\,0\,\rangle\,, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

mit $\varepsilon^0 = 0,\ \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{k} = 0,\ |\boldsymbol{\varepsilon}| = 1$, d.h. insbesondere $\varepsilon^\mu k_\mu = 0$.
Diese Zustände erfüllen Kontinuumsnormierung

$$\langle \mathbf{k}',\varepsilon'|\mathbf{k},\varepsilon\rangle = \left(\boldsymbol{\varepsilon}'^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\right)(2\pi)^3 2\omega\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

Linear polarisierte Photonen werden durch reellen Polaristionsvektor $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*$ beschrieben, **rechts- und linkszirkular polarisierte** Photonen durch $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)$. Warum haben wir uns nicht gleich auf Zustandsvektoren $(***)$ beschränkt? Transversalität an den Polarisationsvektor ε ist nicht Lorentz-Kovariant:

$$k \to k' = \Lambda k, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} \to \varepsilon' = \Lambda\varepsilon$$

$$\rightsquigarrow \quad \varepsilon'^\mu k'_\mu = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'^0 \\ \mathbf{e}' + \varepsilon'^0 \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}'|} \end{pmatrix}$$

Zwar ist $\mathbf{e}'\cdot\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}'|} = 0$ aber i.a. $\varepsilon'^0 \neq 0$.

Bermerkung: Der entsprechende Zustandsvektor ist aber äquivalent zu demjenigen eines rein transversalen Photons

$$\begin{aligned} -\varepsilon'^{\mu} a_{\mu}^{+}(\mathbf{k}')\,|\,0\,\rangle &= \left\{ \mathbf{e}' \cdot \mathbf{a}^{+}(\mathbf{k}') - \varepsilon'^{0} \left[a_{0}^{+}(\mathbf{k}') - \frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|} \cdot \mathbf{a}^{+}(\mathbf{k}') \right] \right\} |\,0\,\rangle \\ &\sim \mathbf{e}' \cdot \mathbf{a}^{+}(\mathbf{k}')\,|\,0\,\rangle \end{aligned}$$

Normal- und zeitgeordnete Produkte

Wir wollen nun die Erwartungswerte einiger physikalisch beobachtbarer Größen angeben – $\langle \ldots \rangle$ bedeutet den EW in einem beliebigen physikalischen Zustand.
Wegen $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ ist

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{B}(x) \rangle &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{ikx} \left\langle -i\mathbf{k} \times \left[\mathbf{e}_1 \alpha_1^+(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2 \alpha_2^+(\mathbf{k}) \right] \right\rangle \right\} \\ &\quad + e^{-ikx} \left\langle i\mathbf{k} \times \left[\mathbf{e}_1 \alpha_1(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2 \alpha_2(\mathbf{k}) \right] \right\rangle\end{aligned}$$

und wenn $\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \partial_0 \mathbf{A} \quad \rightsquigarrow \quad \langle \mathbf{E} \rangle = -\langle \partial_0 \mathbf{A} \rangle$ da $\langle \nabla A_0 \rangle = 0$ denn

$$\begin{aligned}&\langle \text{phys. Zust.} | \, a_0^+(\mathbf{k}) \, | \text{phys. Zust.} \rangle \\ = \; &\langle \text{phys. Zust.} | \, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_0^+(\mathbf{k}) + \alpha_3^+(\mathbf{k}) \right) | \text{phys. Zust.} \rangle \\ = \; &0\end{aligned}$$

da $\alpha_0^+ \, |\text{phys. Zust.}\rangle$ und $\langle \text{phys. Zust.}| \, \alpha_3^+ = 0$ denn $|\text{phys. Zust.}\rangle$ enthält kein α_3^+.
analog $\langle \text{phys. Zust.}| \, a_0(\mathbf{k}) \, |\text{phys. Zust.}\rangle = 0$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{E} \rangle &= -\langle \partial_0 \mathbf{A} \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ -i\omega e^{ikx} \left\langle \mathbf{e}_1 \alpha_1^+(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2 \alpha_2^+(\mathbf{k}) \right\rangle + i\omega e^{-ikx} \left\langle \mathbf{e}_1 \alpha_1(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2 \alpha_2(\mathbf{k}) \right\rangle \right\}\end{aligned}$$

Es tragen also nur die transversalen Freiheitsgrade der Photonen bei, im Einklang mit dem Experiment.

Energie p^0 und Impuls $\mathbf{p}$ des elektromagnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} \text{klassisch} \qquad p^0 &= \int_{t=\text{const.}} d^3x \, \frac{1}{2} \left[E^2(x) + B^2(x) \right] \\ \mathbf{p} &= \int_{t=\text{const.}} d^3x \, \mathbf{E}(x) \times \mathbf{B}(x) \end{aligned}$$

Betrachten wir $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ als Feldoperatoren, so finden wir in einem beliebigen physikalischen Zustand

$$\begin{aligned} \langle p'^0 \rangle &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \, \omega \cdot \left\langle \sum_{i=1}^{2} \left\{ \alpha_i^+(\mathbf{k}) \alpha_i(\mathbf{k}) + \alpha_i(\mathbf{k}) \alpha_i^+(\mathbf{k}) \right\} \right\rangle \\ \langle \mathbf{p}' \rangle &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \, \mathbf{k} \cdot \left\langle \sum_{i=1}^{2} \left\{ \alpha_i^+(\mathbf{k}) \alpha_i(\mathbf{k}) + \alpha_i(\mathbf{k}) \alpha_i^+(\mathbf{k}) \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

($\rightarrow$ Übung) wieder tragen nur die physikalischen Freiheitsgrade der Photonen bei.

Es ergibt sich aber eine neue Schwierigkeit:

Betrachte Vakuum-Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, p'^0 \,|0\rangle &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\,\omega \cdot \sum_{l=1}^{2} \langle 0|\, \alpha_i(\mathbf{k})\alpha_i^+(\mathbf{k}) \,|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int d^3k\,\omega \cdot 2\delta^3(0) \\
&= \frac{1}{2}\int d^3k\,\omega \cdot 2\frac{V}{(2\pi)^3} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, \mathbf{p}' \,|0\rangle &= \frac{1}{2}\int d^3k\,\mathbf{k} \cdot 2\delta^3(0) \\
&= \frac{1}{2}\int d^3k\,\mathbf{k} \cdot 2\frac{V}{(2\pi)^3} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir Fermis Trick benutzt und $(2\pi)^3\delta^3(0)$ durch ein Normierungsvolumen V ersetzt.
$\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \Rightarrow (2\pi)^3\delta^3(0) = \int d^3k \to V$ falls Integral nicht über unendliche, sondern endliche Volumen V.

(2) ist relativ harmlos: Symmetrische Integration über alle Impulse gibt 0.

(1) stellt Nullpunktsenergie des elektromagnetischen Feldes dar (im Volumen). Nur Energiedifferenzen meßbar, wählen Vakuum als Nullpunkt der Energiezählung.
$\Rightarrow$ bisherige Energieoperatoren werden ersetzt durch

$$p^0 = p'^0 - \langle 0|\, p'^0\, |0\rangle$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad \langle p^0 \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \omega \left\langle \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \alpha_i^+(\mathbf{k})\alpha_i(\mathbf{k}) + \alpha_i(\mathbf{k})\alpha_i^+(\mathbf{k}) - \langle 0|\, \alpha_i(\mathbf{k})\alpha_i^+(\mathbf{k})\, |0\rangle \right\} \right\rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \omega \left\langle \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \alpha_i^+(\mathbf{k})\alpha_i(\mathbf{k}) + \alpha_i(\mathbf{k})\alpha_i^+(\mathbf{k}) - \left[\alpha_i(\mathbf{k}),\, \alpha_i^+(\mathbf{k})\right] \right\} \right\rangle \\
&= \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \omega \left\langle \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^+(\mathbf{k})\alpha_i(\mathbf{k}) \right\rangle
\end{aligned}$$

Hier stehen alle Erzeugungsoperatoren links von den Vernichtungsoperatoren
$\rightsquigarrow$ wohldefiniertem Operator ohne Divergenzen.

Mathematisch ergaben sich die Divergenzprobleme, da sich Produkte von Feldoperatoren am selben Punkt wie $(\mathbf{E}(x))^2$ als zu singulär erwiesen. Wir können die Subtraktion der Vakuumenergie automatisch bewirken, wenn wir eine neue Art Produkt von Feldoperatoren einführen, das **normalgeordnete Produkt** oder **Normalprodukt**.

Definition:
Im Normalprodukt wirken alle Erzeuger so, als stünden sie *links* von allen Vernichtern.

$$\begin{aligned} :a^+a'^+: &= a^+a'^+ \\ :a^+\,a': &= a^+a' \\ :a'\,a'^+: &= a^+a' \\ :a\;\;a': &= a\;\;a' \end{aligned}$$

a, a' beliebige Vernichter von **Bose**-Feldern. Bei Fermionen zusätzlich Minus-Zeichen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) \sim a^+ + a \quad \Longrightarrow \quad :\mathbf{E}^2(x): &\sim :\left(a^+ + a\right)\left(a^+ + a\right): \\ &= :a^+a^+ + a^+a + aa^+ + aa: \\ &= a^+a^+ + 2a^+a + aa \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die korrekten Ausdrücke für Energie und Impuls zu

$$
\begin{aligned}
p^0 &= \int_{t=\text{const}} d^3x \, \frac{1}{2} : \left(\mathbf{E}^2(x) + \mathbf{B}^2(x)\right) : \\
\mathbf{p} &= \int_{t=\text{const}} d^3x \, : \mathbf{E}(x) \times \mathbf{B}(x) :
\end{aligned}
$$

Das analoge Problem taucht beim Dirac-Feld auf und wird ebenso durch das Normalprodukt gelöst:

Betrachte den Dirac-Strom $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ transformiert wie Vierervektorstromdichte.

Ursprünglich sah man das Dirac-Feld als relativistische Wahrscheinlichkeitsamplitude für ein Elektron an. Dabei wurde die Nullkomponente des Dirac-Stromes als Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretiert, denn für den Dirac-Spinor gilt ja $\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) = \psi^+(x)\psi(x) > 0$ für $\psi(x) \neq 0$. Eine Ein-Teilchen-Interpretation des Dirac-Spinors ist jedoch nicht haltbar – Frage: Welche Rolle spielt der Dirac-Strom in der Theorie des freien quantisierten Dirac-Feldes?

Ladungs- und Stromverteilung, d.h. die elektromagnetische Viererstromdichte $j^\mu(x)$ eines Systems von Elektronen und Positronen ist sicher eine beobachtbare Größe. Ansatz:

$$j^\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \qquad -e = \text{Elektronenladung}$$

$\rightsquigarrow$ Operator der Gesamtladung

$$Q' = \int d^3x j^0(\mathbf{x},t) = -e\int d^3x \bar{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^0\psi(\mathbf{x},t)$$

Erinnerung:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}\sum_{s=\pm\frac{1}{2}}\left\{e^{ipx}v_s(p)b_s^+(\mathbf{p}) + e^{-ipx}u_s(p)a_s(\mathbf{p})\right\}$$

$$\rightsquigarrow \qquad Q' = -e\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{s=\pm\frac{1}{2}}\left\{a_s^+(\mathbf{p})a_s(\mathbf{p}) + b_s(\mathbf{p})b^+(\mathbf{p})\right\}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \langle 0|\, Q' \,|0\rangle &= -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \underbrace{\langle 0|\, b_s(\mathbf{p}) b_s^+(\mathbf{p}) \,|0\rangle}_{=\langle 0|\underbrace{\left\{b_s(\mathbf{p}),\, b_s^+(\mathbf{p})\right\}}_{=(2\pi)^3 2p^0\delta(0)}|0\rangle} \\
&= -e \int d^3p\, 2\delta^3(0) \\
&= \infty \quad (V \to \infty)
\end{aligned}
$$

also ein ähnliches Problem wie mit dem Nullpunkt der Energiezählung. Wir erhalten einen "guten" Ladungsoperator Q, wenn wir die Gesamtladung des Vakuums als Nullpunkt wählen.

$$
\begin{aligned}
Q &= Q' - \langle 0|\, Q' \,|0\rangle \\
&= -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(a_s^+(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) + b_s(\mathbf{p}) b_s^+(\mathbf{p}) - \left\{b_s(\mathbf{p}),\, b_s^+(\mathbf{p})\right\}\right) \\
&= -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(a_s^+(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) - b_s^+(\mathbf{p}) b_s(\mathbf{p})\right)
\end{aligned}
$$

Q hat positive und negative Eigenwerte, Elektronen haben Ladung $-e$, Positronen $+e$. Die unendliche Selbstladung des Vakuums rührt mathematisch wieder vom Produkt zweier Feldoperatoren am selben Ort, wird vermieden durch **Normalordnung** der Feld-Operatoren wie bei Bosonen.

Definition:

$$: a_r(\mathbf{p}) a_s^+(\mathbf{p}) := -a_s^+(\mathbf{p}') a_r(\mathbf{p})$$

d.h. für jede Vertauschung von Feld-Operatoren ein "−" Zeichen.

$\rightsquigarrow$

$$\boxed{j^\mu(x) = -e : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) :}$$

n.b.: $: \bar{\psi}\gamma^0\psi :$ nicht mehr positiv.

Elektromagnetische Kopplung und Störungsentwicklung

Im Rahmen eines deduktiven Aufbaus der QED stellt man die Lagrange-Funktion des gekoppelten Maxwell-Dirac Systems an die Spitze, und zwar zunächst für die klassischen Felder:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$$

mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}'(x)$$

Freie Felder:

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

WW:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(x) &= -j^\mu(x) A_\mu(x) \\ &= e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \end{aligned}$$

Die Gestalt des Kopplungsterms hatten wir schon früher im Zusammenhang mit der WW des quantisierten Strahlungsfeldes mit Materie hergeleitet. Er ergibt sich aus $\mathcal{L}_0$ durch die Substitution

$$\boxed{\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu}$$

"minimale Ankopplung"

denn

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right) - m\right)\psi = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi = \mathcal{L}_0 - j^\mu A_\mu.$$

Dies macht die Theorie **lokal** eichinvariant unter $U(1)$. $\mathcal{L}_0$ ist invariant unter $\psi \to e^{ie\Lambda\psi}$, $\Lambda = \text{const}$, die Lagrange-Funktion ändert sich bei Multiplikation des Dirac-Spinors mit konstantem Phasenfaktor nicht. Diese Invarianz der Lagrange-Funktion einer globalen Eichtransformation hat, nach dem Noether-Theorem, einen Erhaltungssatz zur Folge: In diesem Fall ist es die Ladung, die die Erhaltungsgröße darstellt. Da aber Λ konstant ist, muß die Eichtransformation an jedem Punkt der Raum-Zeit dieselbe sein, es ist eine **globale** Eichtransformation. D.h. rotieren wir die Phase des Spinors an einem Punkt um den Winkel Λ, müssen wir dieselbe Rotation an allen anderen Punkten gleichzeitig ausführen.

Nimmt man diese physikalische Interpretation ernst, dann sieht man, daß sie unmöglich zu erfüllen ist, da sie den Geist der Relativität verletzt, nach dem es eine minimale Verzögerung geben muß, die der Zeit entspricht, die das Licht braucht, um von einem Raumpunkt zum anderen zu reisen.

Um dieses Problem zu umschiffen, gibt man die Forderung, daß Λ eine Konstante sein muß, auf und schreibt den Phasenfaktor als eine beliebige Funktion der Raum-Zeit: $\Lambda(x)$

Dies ist eine **lokale** Eich-Transformation, sie variiert von Punkt zu Punkt. Sie wird auch "Eich-Transformation der zweiten Art" genannt.

Nun taucht bei einer Umeichung mit einer lokalen Eich-Transformation

$$\psi \longrightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi \tag{1}$$

ein Zusatzterm (durch) auf, der aber genau eine Umeichung des elektromagnetischen Feldes entspricht

$$\boxed{A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x)} \tag{2}$$

denn mit (1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \quad \longrightarrow \quad & \mathcal{L} + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu (ie\Lambda)\right)\psi \\ & = \mathcal{L}_0 + e\bar{\psi}\gamma^\mu \underbrace{\left(A_\mu - \partial_\mu \Lambda\right)}_{=A'_\mu} \psi \end{aligned}$$

m.a.W.: $\mathcal{L}$ ist invariant unter der lokalen Eich-Transformation (1), (2) : $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Diese von H. Weyl 1929 entdeckte Invarianz des gekoppelten Maxwell-Dirac-Systems bezeichnen wir in moderner Sprechweise als eine $U(1)$-Eichsymmetrie. Eichsymmetrien sind der Eckstein der modernen Theorien der Elementarteilchen. Sowohl die starke wie die schwache WW wird von Eichsymmetrien beherrscht, die eine Verallgemeinerung der Eichsymmetrie der QED darstellen.

Vernachlässigen wir in $\mathcal{L}$ den Kopplungsterm, d.h. setzen wir $e = 0$, so erhalten wir als Euler-Lagrange-Gleichungen die freien Maxwell- und Dirac-Gleichungen. die Quantisierung der entsprechenden Felder geschieht wie besprochen. Die Idee ist nun, eine Reihenentwicklung in e zu machen, um die Kopplung zu berücksichtigen. → Störungstheorie

Dirac- oder WW-Bild

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$$

⇝ Feldoperatoren genügen

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\,[\mathcal{H}_0, A(t)] \quad \Longrightarrow \quad A(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} A e^{-i\mathcal{H}_0 t}$$

Zustände genügen

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = \mathcal{H}'(t)|t\rangle \qquad (*)$$

□ $|t\rangle = T \exp(-iH'(t))\,|t=0\rangle$ (später)

Da der Kopplungsterm $\mathcal{L}'$ in der Lagrange-Dichte keine Ableitungen nach der Zeit enthält, ist die WW-Energie $\mathcal{H}'(t)$ bis auf Vorzeichen gleich $\mathcal{L}'$:

$$\mathcal{H}'(t) = -\int d^3r \mathcal{L}'(\mathbf{r},t) = \int d^3r j^\mu(\mathbf{r},t) A_\mu(\mathbf{r},t)$$

d.h.

$$\boxed{\mathcal{H}'(t) = -\int d^3r \ :\bar{\psi}(\mathbf{r},t)\gamma^\mu\psi(\mathbf{r},t): \ A_\mu(\mathbf{r},t)} \qquad (**)$$

Die Gleichungen $(*)$ und $(**)$ sind das Fundament, auf dem wir die Feynman-Regeln der QED aufbauen werden.

Wir betrachten folgende physikalische Fragestellung:
Zur Zeit $t \to -\infty$ sei eine gewisse Anzahl von Elektronen, Positronen und Photonen vorhanden, die alle weit voneinander separiert seien. Diese Teilchen können sich dann im Laufe der Zeit treffen, aneinander streuen, sich vernichten, neue Teilchen erzeugen.

Wir fragen nach dem Zustand zur Zeit $t \to +\infty$, insbesondere nach der Übergangsamplitude in einen gegebenen Zustand mit gewisser Anzahl von Elektronen, Positronen und Photonen.

$$e^-(p_1) + \cdots + e^+(q_1) + \cdots + \gamma(k_1) + \cdots \longrightarrow e^-(p_1') + \cdots + e^+(q_1') + \cdots + \gamma(k_1') + \cdots$$

Die Feynman- Regeln

Ausgangspunkt ist Gleichung $(*)$
Entwickeln wir in $(**)$ $\bar{\psi}$, ψ und A_μ nach Erzeugern und Vernichtern, wobei wir schematisch setzen $\bar{\psi} \sim b + a^+$, $\psi \sim b^+ + a$, $A_\mu \sim \alpha^+ + \alpha$

(Erinnerung: $\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \sum_{s=\pm 1/2} \left\{ e^{ipx} v_s(p) b_s^+(\mathbf{p}) + e^{-ipx} u_s(p) a_s(\mathbf{p}) \right\}$)
so erhalten wir folgende Struktur für $\mathcal{H}'$:

$$\mathcal{H}' \sim : (b + a^+)(b^+ + a) : (\alpha^+ + \alpha)$$

$$\sim -b^+ b (\alpha^+ + \alpha) + a^+ b^+ (\alpha^+ + \alpha) + ba (\alpha^+ + \alpha) + a^+ a (\alpha^+ + \alpha)$$

$$\sim \underbrace{-b^+ b (\alpha^+ + \alpha)}_{(4)} + \underbrace{a^+ b^+ (\alpha^+ + \alpha)}_{(3)} + \underbrace{ba (\alpha^+ + \alpha)}_{(2)} + \underbrace{a^+ a (\alpha^+ + \alpha)}_{(1)}$$

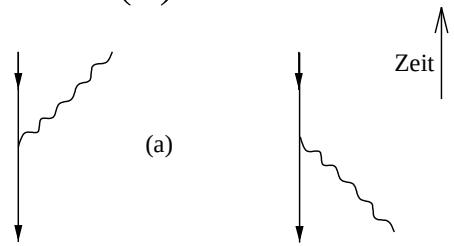
(1) (2) (3) (4)

Wenden wir $\mathcal{H}'$ auf einen beliebigen Zustand an, so bewirkt z.B. der Term (1) folgendes: Durch a wird ein Elektron vernichtet, durch a^+ ist wieder ein Elektron erzeugt mit im allgemeinen anderen Impuls. Dabei wird ein Photon entweder emittiert (α^+) oder absorbiert (α).

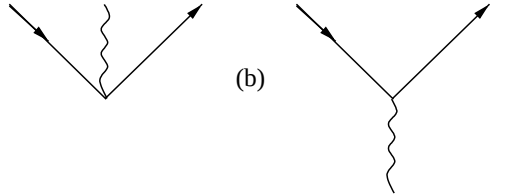
$$H' \sim : (b + a^+)\,(b^+ + a) : (\alpha^+ + \alpha)$$

$$\sim \underbrace{-b^+ b(\alpha^+ + \alpha)}_{(1)} + \underbrace{a^+ b^+ (\alpha^+ + \alpha)}_{(2)} + \underbrace{ba(\alpha^+ + \alpha)}_{(3)} + \underbrace{a^+ a(\alpha^+ + \alpha)}_{(4)}$$

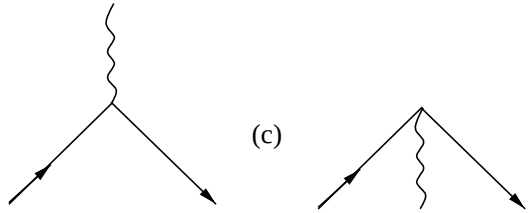
(1) Emission oder Absorption eines Photons durch ein Positron



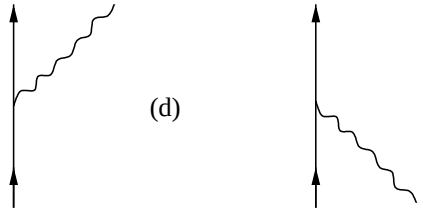
(2) Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares unter Emission oder Absorption eines Photons



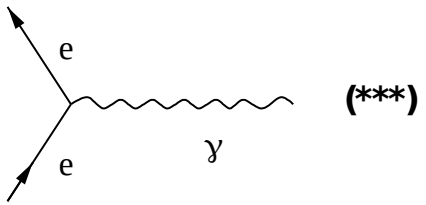
(3) Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares unter Emission oder Absorption eines Photons



(4) Emission oder Absorption eines Photons durch ein Elektron



Alle Prozesse können durch ein einziges Diagramm dargestellt werden, s. $(***)$, wenn man vereinbart, Positronen durch in der Zeit zurücklaufende Elektronenlinien zu symbolisieren.



Zur Zeit $t \to \infty$ haben wir eine gewisse Anzahl Elektronen, Positronen und Photonen, die wir durch entsprechende Linien andeuten.

Nach $(*)$ besteht eine Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für den Übergang in anderen Zustand, wobei einer der Prozesse (1) - (4) geschehen kann. Das kann sich wiederholen; die Übergangs-Amplituden in einem bestimmten Endzustand müssen entsprechend den Regeln der QM kohärent addiert werden, unabhängig von den Zwischenschritten, die zu diesem Zustand führen. Korrekte Superposition ergibt sich aus der formalen Lösung von $(*)$:

$$|t\rangle = \left\{ 1 + (-i) \int_{-\infty}^{t} dt' \mathcal{H}'(t') + (-i)^2 \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \mathcal{H}'(t') \mathcal{H}'(t'') + \cdots \right\} |t = -\infty\rangle$$

Daraus ergibt sich der $\mathcal{S}$-Operator, der die Zeitentwicklung der Zustände von $t \to -\infty$ nach $t \to +\infty$ beschreibt:

$$\begin{aligned} |t = +\infty\rangle &= \mathcal{S}\,|t = -\infty\rangle \\ &= \Big\{1 + (-i)\int_{-\infty}^{\infty} dt'\mathcal{H}'(t') + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\mathcal{H}'(t')\mathcal{H}'(t'') \\ &\quad + \cdots\Big\}\,|t = -\infty\rangle \end{aligned}$$

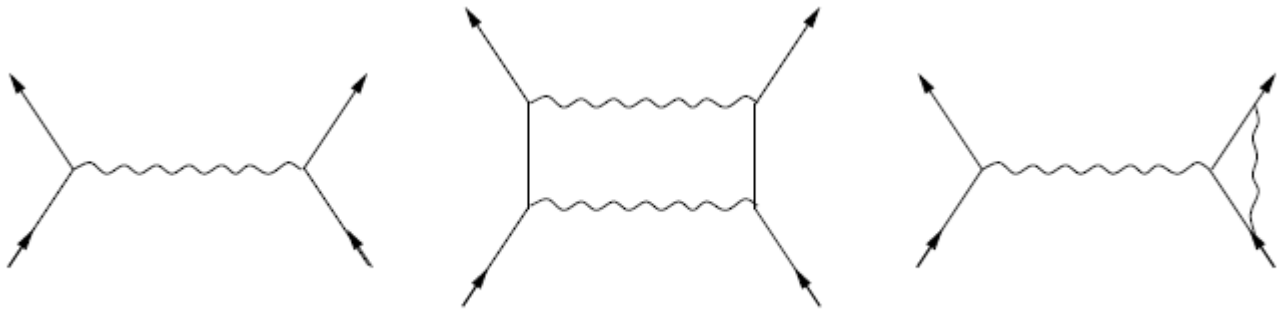
Mit Hilfe des zeitgeordneten Produkts kann man $\mathcal{S}$ etwas schöner schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\left(\mathcal{H}'(t_1)\cdots\mathcal{H}'(t_n)\right) \\ &= T\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\mathcal{H}'(t')\right\} \qquad (+) \end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}'$ proportional zu $e$ist, haben wir in $(+)$ eine Entwicklung des $\mathcal{S}$-Operators nach Potenzen von $e = \sqrt{4\pi\alpha}$, α die Feinstrukturkonstante, vor uns: Bsp. für Streuung zweier Elektronen

Beispiel

Elektron-Elektron-Streuung (Møller-Streuung)



2. Ordnung in e

4. Ordnung in e

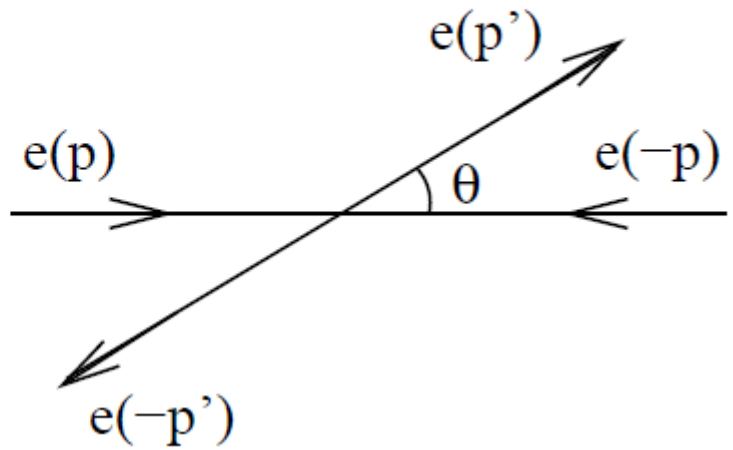
$$e^-(p_1, r_1) + e^-(p_2, r_2) \to e^-(p_3, r_3) + e^-(p_4\ r_4) \qquad (\times)$$

Schwerpunktssystem

$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad , \quad p_2 = \begin{pmatrix} E \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p}' \end{pmatrix} \quad , \quad p_4 = \begin{pmatrix} E \\ -\mathbf{p}' \end{pmatrix}$$

Es ist $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$.



Def.:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2 \quad \Rightarrow |\mathbf{p}| = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2}$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = -(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = -4|p|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = -(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 = -4|p|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Vor der Streuung: $|t \to -\infty\rangle = a^+_{r_1}(\mathbf{p}_1) a^+_{r_2}(\mathbf{p}_2) |\,0\,\rangle$

Amplitude für $(\times)$:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle e\,(p_3,\,r_3)\,e\,(p_4,\,r_4)|\,\mathcal{S}\,|e\,(p_1,\,r_1)\,e\,(p_2,\,r_2)\rangle \\ &= \langle\,0\,|\,a_{r_3}(\mathbf{p}_3)a_{r_4}(\mathbf{p}_4)\,\mathcal{S}\,a^+_{r_1}(\mathbf{p}_1)a^+_{r_2}(\mathbf{p}_2)\,|\,0\,\rangle \qquad (\times\times) \end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \mathbf{1}$ trägt nichts bei zu $(\times\times)$, wenn $(p_1, r_1), (p_2, r_2) \neq (p_3, r_3), (p_4, r_4)$

$+(-i)\int_{-\infty}^{\infty} dt'\mathcal{H}'(t')$ trägt nichts bei zu $(\times\times)$ da nur1 Photonen-Erzeuger bzw. -Vernichter

$+(-i)^2\int_{-\infty}^{t} dt'\int_{-\infty}^{t'} dt''\mathcal{H}'(t')\mathcal{H}'(t'')$ relevant, Ordnung e^2

$$\rightsquigarrow \quad S_{fi} = \frac{(-i)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\int_{-\infty}^{\infty} dt''\,\langle e(p_3,r_3)e(p_4,r_4)|\,T(\mathcal{H}(t')\mathcal{H}(t''))\,|e(p_1,r_1)e(p_2,r_2)\rangle$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad S_{fi} &= \frac{(i)^2}{2!}e^2\int dx'dx''\,\langle\,0\,|\,a_{r_3}(\mathbf{p}_3)a_{r_4}(\mathbf{p}_4) \\ &\quad T\left\{:\bar\psi(x')\gamma^\mu\psi(x'):\;A_\mu(x')\;:\bar\psi(x'')\gamma^\nu\psi(x'):\;A_\nu(x'')\right\} \\ &\quad a^+_{r_1}(\mathbf{p}_1)a^+_{r_2}(\mathbf{p}_2)\,|\,0\,\rangle \end{aligned}$$

Struktur:

$$(\times) = \langle 0 \,|\, aa \,:\, (b + a^+)(b^+ + a) \,:\, (\alpha + \alpha^+) \,:\, (b + a^+)(b^+ + a) \,:\, (\alpha + \alpha^+) a^+ a^+ \,|\, 0 \rangle$$

Auswertung wird erleichtert durch das **Wick'sche Theorem**:

Erinnerung: $\langle 0 \,|\, a_i a_j^+ \,|\, 0 \rangle = \langle 0 \,|\, \{a_i, a_j^+\} - a_j^+ a_i \,|\, 0 \rangle = \{a_i, a_j\}$

$$\begin{aligned}
\langle 0 \,|\, a_1 a_2^+ a_3 a_4^+ \,|\, 0 \rangle &= \langle 0 \,|\, \left(\left\{a_1, a_2^+\right\} - a_2^+ a_1\right) \left(\left\{a_3, a_4^+\right\} - a_3^+ a_4\right) |\, 0 \rangle \\
&= \left\{a_1, a_2^+\right\} \cdot \left\{a_3, a_4^+\right\} \\
&= \langle 0 \,|\, a_1 a_2^+ \,|\, 0 \rangle \langle 0 \,|\, a_3 a_4^+ \,|\, 0 \rangle
\end{aligned}$$

Definition: $\langle 0 \,|a_i a_j^+|\, 0 \rangle = \underbrace{a_i a_j^+}$ =“Kontraktion”

d.h. $\langle 0 \,|\, \underbrace{a_1 a_2^+} \underbrace{a_3 a_4^+} \,|\, 0 \rangle = \underbrace{a_1 a_2^+} \; \underbrace{a_3 a_4^+}$

$$\begin{aligned}
\langle 0 \,|\, a_1 a_2 a_3^+ a_4^+ \,|\, 0 \rangle &= \langle 0 \,|\, \left(a_1 \left\{a_2, a_3^+\right\} - a_3^+ a_2\right) a_4^+ \,|\, 0 \rangle \\
&= \langle 0 \,|\, a_1 a_4^+ \,|\, 0 \rangle \left\{a_2, a_3^+\right\} - \langle 0 \,|\, a_1 a_3^+ a_2 a_4^+ \,|\, 0 \rangle \\
&= \langle 0 \,|\, a_1 a_4^+ \,|\, 0 \rangle \langle 0 \,|\, a_2 a_3^+ \,|\, 0 \rangle - \langle 0 \,|\, a_1 a_3^+ \,|\, 0 \rangle \langle 0 \,|\, a_3 a_4^+ \,|\, 0 \rangle
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\langle 0 \,|\, a_1 a_2 a_3^+ a_4^+ \,|\, 0 \rangle &= \langle 0 \,|\, a_1 a_2 a_3^+ a_4^+ \,|\, 0 \rangle + \langle 0 \,|\, a_1 a_2 a_3^+ a_4^+ \,|\, 0 \rangle \\
&= + a_1 a_4^+ \; a_2 a_3^+ - a_1 a_3^+ \; a_2 a_4^+ \\
&\quad \text{für Fermionen! (Bosonen } \textit{kein} \text{ } - \text{Zeichen.)}
\end{aligned}$$

(3.) Wick'sches Theorem: Vakuumerwartungswert eines Produktes von Erzeugern und Vernichtern ist gleich der Summe aller Kontraktionen.

Zu S_{fi}: Die Operatoren α, α^+ aus $A_\mu(x')$ können nur mit denen aus $A_\nu(x'')$ kontrahiert werden.

Bei Kontraktion der Fermi-Operatoren erhalten wir keinen Beitrag, wenn ein Operator aus $\psi(x')$ mit einem aus $\bar{\psi}(x'')$ verbunden ist, denn dann tritt auch mindestens eine Kontraktion eines einlaufenden mit einem auslaufenden Elektronenoperator auf, die wegen $(p_1, r_1), (p_2, r_2) \neq (p_3, r_3), (p_4, r_4)$ verschwindet.

$\Rightarrow$ Nur Beiträge von Kontraktion der ein- bzw. auslaufenden Elektronen mit den Feldoperatoren ψ bzw. $\bar{\psi}$. (z.B. $a^+_{r_1}(\mathbf{p}_1)$ mit $\psi(x')$ und $\psi(x'')$ etc.)

$$
\begin{aligned}
\mu &= \langle\, 0 \,|\, a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4) \,:\, \overline{\psi}(x')\gamma^\mu\psi(x') \,::\, \overline{\psi}(x'')\gamma^\nu\psi(x'') \,:\, a^+(\mathbf{p}_1)a^+(\mathbf{p}_2) \,|\, 0 \,\rangle \\
&= a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4) : \overline{\psi}(x')\gamma^\mu\psi(x') :: \overline{\psi}(x'')\gamma^\nu\psi(x'') : a^+(\mathbf{p}_1)a^+(\mathbf{p}_2) \\
&\quad + a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4) : \overline{\psi}(x')\gamma^\mu\psi(x') :: \overline{\psi}(x'')\gamma^\nu\psi(x'') : a^+(\mathbf{p}_1)a^+(\mathbf{p}_2) \\
&\quad + a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4) : \overline{\psi}(x')\gamma^\mu\psi(x') :: \overline{\psi}(x'')\gamma^\nu\psi(x'') : a^+(\mathbf{p}_1)a^+(\mathbf{p}_2) \\
&\quad + a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4) : \overline{\psi}(x')\gamma^\mu\psi(x') :: \overline{\psi}(x'')\gamma^\nu\psi(x'') : a^+(\mathbf{p}_1)a^+(\mathbf{p}_2) \\
&= \Big\{ \bar{u}(p_4)e^{ip_4x'}\gamma^\mu u(p_1)e^{-ip_1x'} \cdot \bar{u}(p_3)e^{ip_3x''}\gamma^\nu u(p_2)e^{-ip_2x''} \\
&\quad -(1 \leftrightarrow 2) - (3 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4) \Big\} .
\end{aligned}
$$

Kontraktionen von Fermi-Operatoren liefern für $x_0' > x_0''$ und $x_0'' > x_0'$ dasselbe, also

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (ie)^2 \int dx'\, dx'' \, \langle 0|\, T\left(A_\mu(x')A_\gamma(x'')\right)|0\rangle \\ &\quad \left\{\theta(x_0'-x_0'')\,\langle 0|\, A_\mu(x')A_\nu(x'')\,|0\rangle + \theta(x_0''-x_0')\,\langle 0|\, A_\mu(x'')A_\nu(x')\,|0\rangle\right\}\cdot \\ &\quad \Big\{\bar u(p_4)\gamma^\mu u(p_1)e^{i(p_4-p_1)x'}\cdot \bar u(p_3)\gamma^\nu u(p_2)e^{i(p_3-p_2)x''} \\ &\quad -(1\leftrightarrow 2)-(3\leftrightarrow 4)+(1\leftrightarrow 2, 3\leftrightarrow 4)\Big\}\,. \end{aligned}$$

Zusammenfassung von Termen, die sich bloß durch Bezeichnung der Integrations- und Summationsintervalle unterscheiden:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (ie)^2 \int dx'dx'' \, \langle 0|\, T(A_\mu(x')A_\nu(x''))\,|0\rangle \cdot \leftarrow \text{ Feynman-Propagator des Photonenfeldes} \quad . \\ &\quad \Big\{\bar u(p_4)\gamma^\mu u(p_1)\bar u(p_3)\gamma^\nu u(p_2)e^{i(p_4-p_1)x'}e^{i(p_3-p_2)x''} \\ &\quad -\bar u(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\bar u(p_4)\gamma^\nu u(p_2)e^{i(p_3-p_1)x'}e^{i(p_4-p_2)x''}\Big\} \end{aligned}$$

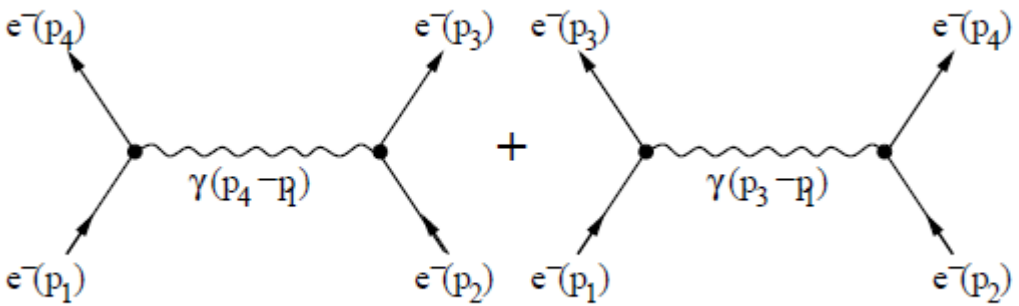
Wegen

$$\langle 0|\, T(A_\mu(x')A_\nu(x''))\,|0\rangle = \int \frac{dk}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)}\, \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} \qquad (\varepsilon \to 0)$$

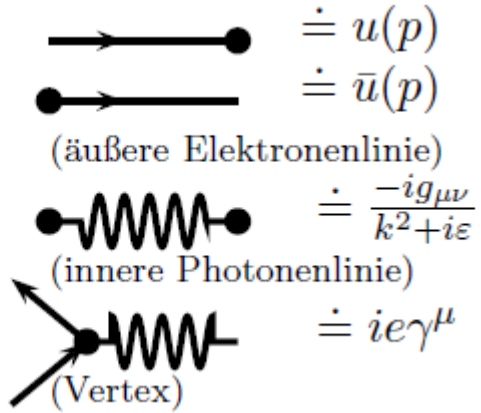
(s.u. und Übung)

lassen sich die Integrale über x' und x'' leicht anführen und ergeben δ-Funktion für Viererimpulse

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_{fi} &= i(2\pi)^4 \delta(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) T_{fi} \\
T_{fi} &= \frac{1}{i}\Big\{ \bar{u}(p_4)(ie\gamma^\mu)u(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_4-p_1)^2}\bar{u}(p_3)(ie\gamma^\nu)u(p_2) \\
&\quad -\bar{u}(p_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_3-p_1)^2}\bar{u}(p_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2)\Big\}.
\end{aligned}$$



An jedem Vertex gilt Vierer-Impuls-Erhaltung.



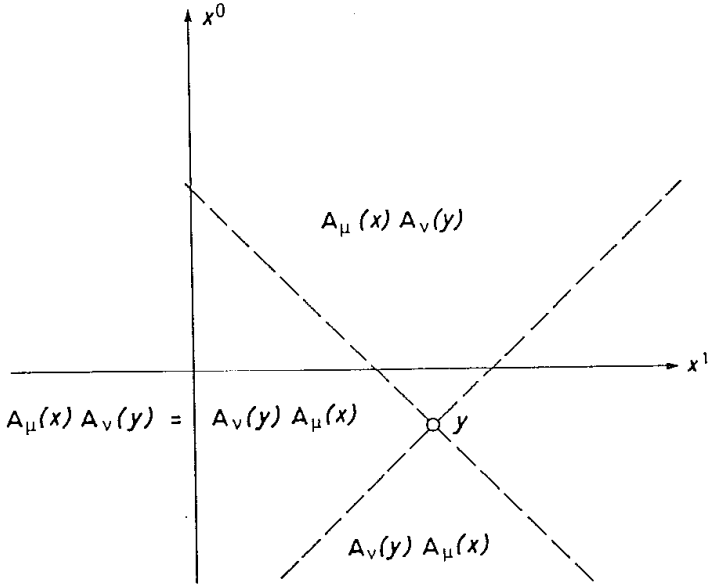
Zum Photonen-Propagator:

Feldoperator für Viererpotential $A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{ikx} a_\mu^+(\mathbf{k}) + e^{-ikx} a_\mu(\mathbf{k}) \right\}$

$$\langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x)\, \mathbf{A}_\nu(y) | 0 \rangle = -g_{\mu\nu} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}, \qquad k = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{k}| \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

Zeitgeordnetes Produkt $\mathrm{T}(\mathbf{A}_\mu(x)\, \mathbf{A}_\nu(y)) = \theta(x^0 - y^0)\, \mathbf{A}_\mu(x)\, \mathbf{A}_\nu(y) + \theta(y^0 - x^0)\, \mathbf{A}_\nu(y)\, \mathbf{A}_\mu(x)$

Unabhängig vom Bezugssytem wg $[\mathbf{A}_\mu(x), \mathbf{A}_\nu(y)] = 0$ für $(x-y)^2 < 0.$



Behauptung: $\langle 0|\mathrm{T}(\mathbf{A}_\mu(x)\,\mathbf{A}_\nu(y))|0\rangle = \mathrm{i}g_{\mu\nu}D_\mathrm{F}(x-y),$

$$\mathrm{i}g_{\mu\nu}D_\mathrm{F}(x-y) = \lim_{\epsilon\to+0}\int\frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}.$$

$$\mathrm{d}k = \mathrm{d}k^0\,\mathrm{d}k^1\,\mathrm{d}k^2\,\mathrm{d}k^3.$$

Beweis:

$$\mathrm{i}g_{\mu\nu}D_\mathrm{F}(x-y)$$
$$= g_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^0(x^0-y^0)}\cdot\frac{1}{(k^0)^2-k^2+\mathrm{i}\epsilon}.$$

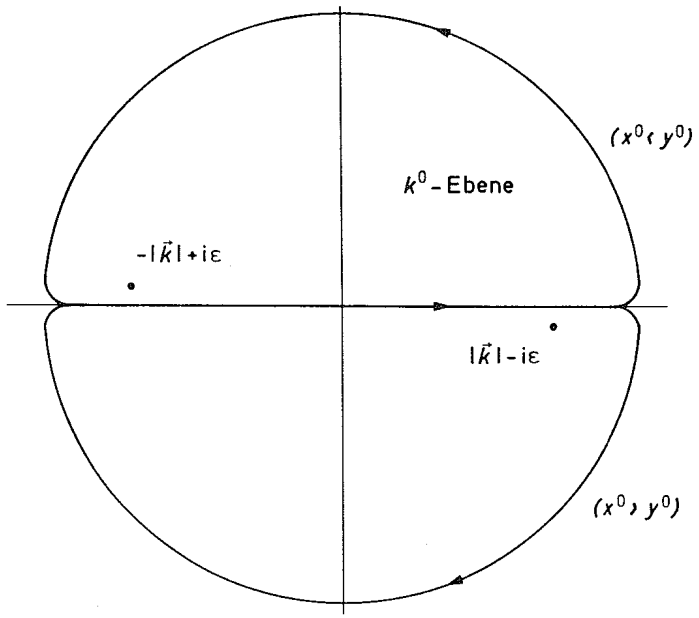
Die Pole des Integranden liegen bei

$$k^0 = \pm\sqrt{k^2-\mathrm{i}\epsilon} \longrightarrow \pm|k|,$$

wie in Bild 7-2 illustriert. Für $x^0 > y^0$ gilt:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^0(x^0-y^0)} \longrightarrow 0$$

für $\mathrm{Im}\,k^0 \to -\infty$.



$$
\begin{aligned}
& \mathrm{i} g_{\mu\nu} D_{\mathrm{F}}(x-y) \\
& = g_{\mu\nu} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} k (x-y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi \mathrm{i}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} k^0 (x^0 - y^0)} \cdot \frac{1}{(k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 + \mathrm{i}\epsilon} .
\end{aligned}
$$

Wir können dann den Integrationsweg durch einen sehr großen Halbkreis in der unteren Hälfte der k^0-Ebene ergänzen und den Residuensatz anwenden. Wir finden:

$$
\mathrm{i} g_{\mu\nu} D_{\mathrm{F}}(x-y) = - g_{\mu\nu} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[|\boldsymbol{k}| (x^0 - y^0) - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right]}}{2|\boldsymbol{k}|}
$$

und durch Vergleich mit Gl. (7-51)

$$
\mathrm{i} g_{\mu\nu} D_{\mathrm{F}}(x-y) = \langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x) \, \mathbf{A}_\nu(y) | 0 \rangle
$$

für $x^0 > y^0$.

Für $x^0 < y^0$ können wir den Integrationsweg in der oberen Halbebene schließen, und es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i} g_{\mu\nu} D_{\mathrm{F}}(x-y) &= - g_{\mu\nu} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[|\boldsymbol{k}| (y^0 - x^0) - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right]}}{2|\boldsymbol{k}|} \\
&= \langle 0 | \mathbf{A}_\nu(y) \, \mathbf{A}_\mu(x) | 0 \rangle \\
&\quad \text{für} \quad x^0 < y^0 .
\end{aligned}
$$

Damit ist Gl. (7-54) bewiesen. Man nennt die Funktion $\mathrm{i} g_{\mu\nu} D_{\mathrm{F}}(x-y)$ bzw. ihre Fourier-Transformierte $-\mathrm{i} g_{\mu\nu}/(k^2 + \mathrm{i}\epsilon)$ den Feynman-Propagator für das freie Photonfeld. Er spielt im Rahmen der Feynman-Regeln eine entscheidende Rolle.