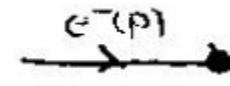
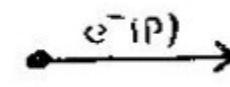
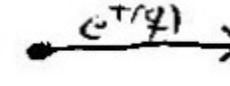
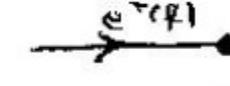
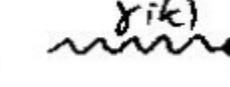
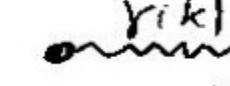
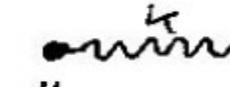
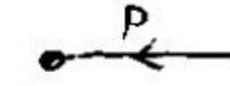


Quantenmechanik II

QED (2)

Heiko Rieger
SS2017

Zusammenstellung der Feynman-Regeln der QED:

physikal. Größeheit	analyt. Ausdruck	Diagrammteil
Elektron im Anfangszustand	$\mu(p)$	einlaufende E-Linie 
Elektron im Endzustand	$\bar{\mu}(p)$	auslaufende E-Linie 
Positron im Anfangszustand	$\bar{v}(q)$	auslaufende E-Linie 
Positron im Endzustand	$v(q)$	einlaufende E-Linie 
Photon im Anfangszustand	ϵ^μ	einlaufende Photon-Linie 
Photon im Endzustand	$\epsilon^{\mu*}$	auslaufende Photon-Linie 
virtuelles Photon	$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	innere Photon-Linie 
virtuelles Elektron	$i \frac{p+m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	innere E-Linie 
Elementarprozess	$i e g \gamma^\mu$	Vertex 

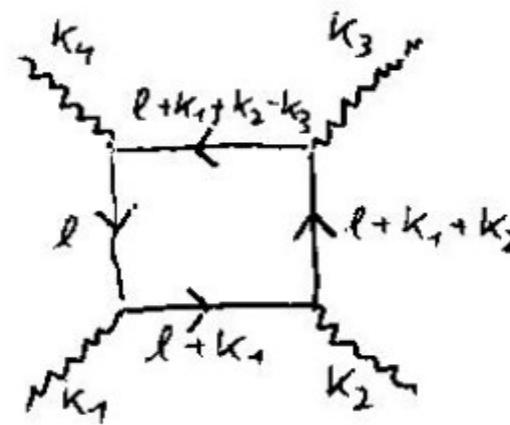
Übergangsumplitude für eine bestimmte Reaktion ergibt sich als Summe aller Diagramme mit vorgegebenen ein- und austretenden Linien.

Im Inneren der Diagramme sind beliebig viele Vertizes zugelassen.

An jedem Vertex gilt Viervektorimpulserhaltung \Rightarrow 4-Impuls-Erhaltung im Ganzen

Bsp. S- Photon-Photon-Streuung

$$\gamma(k_1) + \gamma(k_2) \rightarrow \gamma(k_3) + \gamma(k_4)$$

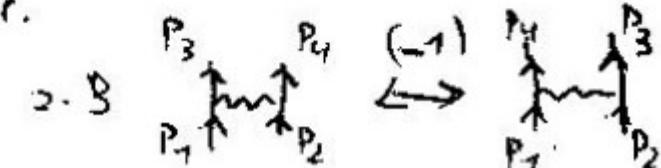


Schleifenimpuls ist l ,
über Schleifenimpuls ist
stets zu integrieren mit
MuB $\int \frac{dl}{(2\pi)^4}$

Für S-Matrix-Element ist noch ein Faktor f. Energie-Impulserhaltung hinzuzufügen: $(2\pi)^4 \delta(\sum_i p_i - \sum_f p_f)$,
 p_f Impulse auslaufender T.
 p_i ————— in ein —————

Faktor (-1) für jede geschlossene Fermionenschleife.

Permutationen äußeren Impulse v. Fermionen
 \rightarrow Signum der Permutation



Feynman-Regeln (vgl. Schwabl, S. 362):

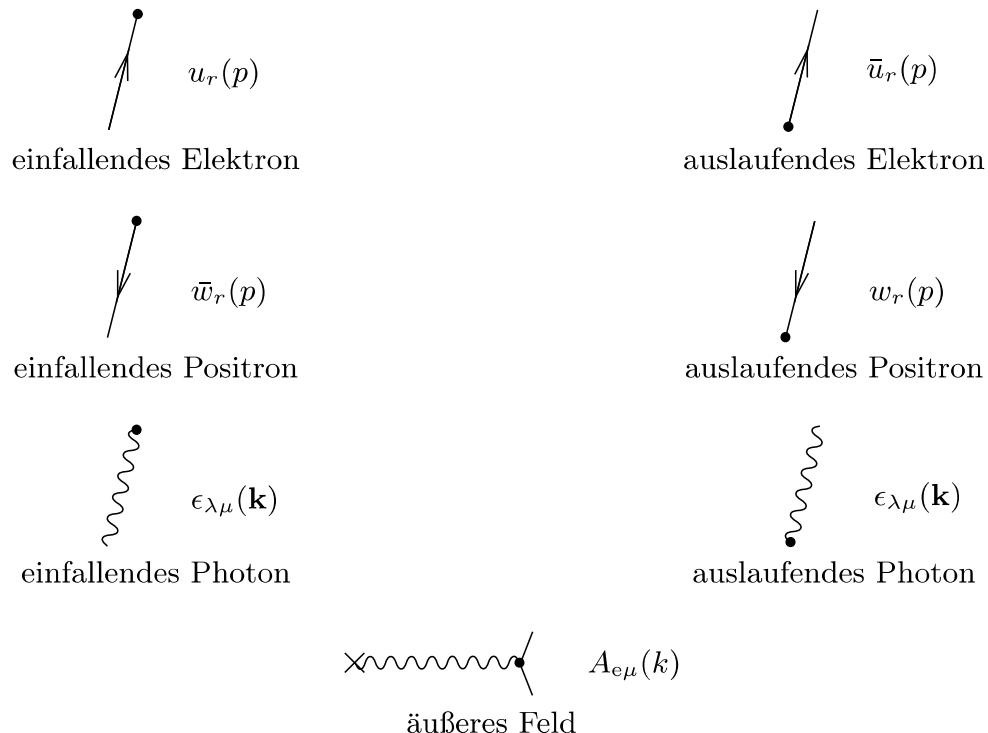
Für vorgegebene Anfangs- und Endzustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ hat das S -Matrixelement die Gestalt

$$\begin{aligned} & \langle f | S | i \rangle \\ &= \delta_{fi} + \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left(\prod_{\substack{\text{äuß.} \\ \text{Fermion}}} \sqrt{\frac{m}{VE}} \right) \left(\prod_{\substack{\text{äuß.} \\ \text{Photon}}} \sqrt{\frac{1}{2V|\mathbf{k}|}} \right) \right] \mathcal{M}, \end{aligned}$$

wobei P_i und P_f die Gesamtmpulse des Anfangs- und Endzustandes sind. Zur Bestimmung von \mathcal{M} zeichnet man alle topologisch verschiedenen Diagramme bis zu der gewünschten Ordnung in der Wechselwirkung, und summiert über die Amplituden dieser Diagramme. Die Amplitude, die einem bestimmten Feynman-Diagramm zukommt, bestimmt man folgendermaßen.

1. Jedem Vertexpunkt ist ein Faktor $-ie\gamma^\mu$ zugeordnet.
2. Für jede innere Photonlinie schreibt man einen Faktor $iD_{F\mu\nu}(k) = i\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + ie}$.
3. Für jede innere Fermionlinie setzt man $iS_F(p) = i\frac{1}{p - m + ie}$.
4. Den äußeren Linien sind die folgenden freien Spinoren und Polarisationsvektoren zugeordnet:
 Einlaufendes Elektron: $u_r(p)$
 Auslaufendes Elektron: $\bar{u}_r(p)$
 Einlaufendes Positron: $\bar{w}_r(p)$
 Auslaufendes Positron: $w_r(p)$
 Einlaufendes Photon: $\epsilon_{\lambda\mu}(\mathbf{k})$
 Auslaufendes Photon: $\epsilon_{\lambda\mu}(\mathbf{k})$
5. Die Spinorfaktoren (γ -Matrizen, S_F -Propagatoren, Viererspinoren) sind für jede Fermionlinie so geordnet, daß man von rechts nach links lesend den Pfeilen entlang der Fermionlinie folgt.
6. Für jede in sich geschlossene Fermionlinie ist ein Faktor (-1) zu setzen und erfolgt Spurbildung in den Spinorindizes.
7. An jedem Vertex erfüllen die Viererimpulse der drei dort zusammentreffenden Linien die Energie- und Impulserhaltung.
8. Über alle freien (durch die Viererimpulserhaltung nicht festgelegten) inneren Impulse ist zu integrieren: $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$.
9. Man multipliziere mit einem Phasenfaktor $\delta_p = 1(-1)$, falls eine gerade (ungerade) Anzahl von Transpositionen notwendig ist, um die Fermion-Operatoren auf Normalordnung zu bringen.

Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik im Impulsraum
 Äußere Linien:



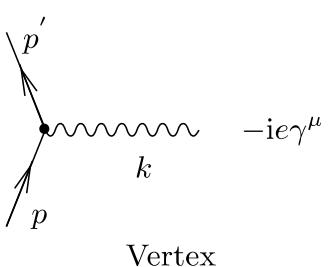
Innere Linien:

$$\bullet \xrightarrow[p]{} \bullet \quad iS_F(p) = i\frac{1}{p-m+i\epsilon}$$

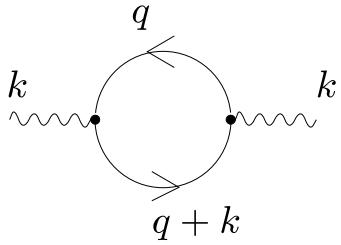
innere Elektronlinie

$$\bullet \xrightarrow[k]{\mu} \bullet \quad iD_F^{\mu\nu}(k) = i\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$$

innere Photonlinie



Das Minuszeichen für eine geschlossene Fermion-Schleife hat den folgenden Ursprung. Ausgehend von dem T -Produkt-Teil, welcher die geschlossene Schleife ergibt, $T(\dots \bar{\psi}(x_1) \mathcal{A}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \mathcal{A}(x_2) \psi(x_2) \dots \bar{\psi}(x_f) \mathcal{A}(x_f) \psi(x_f) \dots)$ muß man den Operator $\bar{\psi}(x_1)$ mit einer ungeraden Zahl von Fermi-Feldern permutieren und erhält so die Folge von Propagatoren $\underline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \dots \underline{\psi(x_f)} \bar{\psi}(x_1)$ mit einem Minuszeichen.

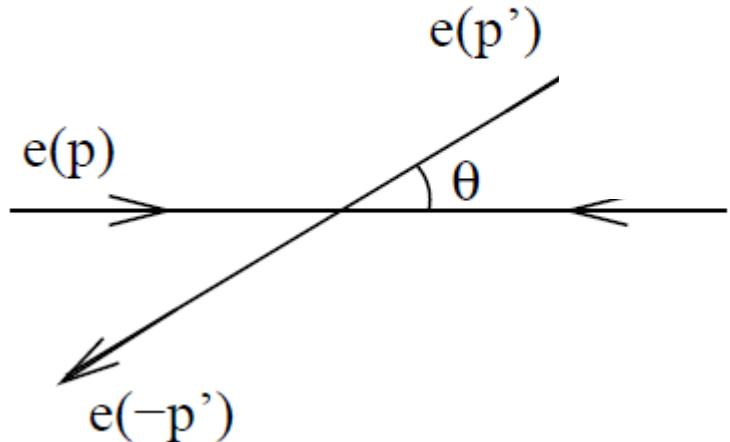


Elektron-Elektron-Streuung

$$e^- (p_1, r_1) + e^- (p_2, r_2) \rightarrow e^- (p_3, r_3) + e^- (p_4, r_4) \quad (\times)$$

Es ist $|p| = |p'|$.

Schwerpunktssystem



$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} E \\ -p \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} E \\ p' \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} E \\ -p' \end{pmatrix}$$

Def.:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2 \quad \Rightarrow |p| = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2}$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = -(p - p')^2 = -4|p|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = -(p + p')^2 = -4|p|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Zur Berechnung des Streuquerschnitts aus den Amplituden:

$$d\sigma = \frac{\text{Übergangsrate nach } p_3, p_4}{\text{Fluss der einlaufenden Teilchen}} = \frac{dw_{S_i} / T}{\phi}$$

$$dw_{S_i} = \underbrace{\frac{1}{2p_1^0 2p_2^0} \left(\frac{1}{V}\right)^2}_{\text{von der Nominierung d. einlaufenden Elektronen-Zust.}} \cdot \underbrace{\frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^6 2p_3^0 2p_4^0}}_{\substack{\text{Lorentz-inv.} \\ \text{Volumenelement} \\ \text{im } (p_3/p_4)\text{-Raum}}} \sum'_{\text{Spins}} \left[(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |T_{S_i}| \right]^2$$

↓
 Mittelung / Summation
 über Spinzustand d.
 Elektronen im
 Ausgang / Endzustand.

Der Quadrat der S-Fette interpretiert man mit Fermi's Trick:

$$\begin{aligned} \left[(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \right]^2 &= \int_V d\tau e^{i(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot \vec{x}} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &\quad \begin{array}{l} \text{V, T} \quad \leftarrow \text{größes aber endl. Vol. V,} \\ \text{größr aber endl. Zeit T} \end{array} \\ &= V \cdot T (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dw_{S_i}}{T} = \frac{1}{V} \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^6 2p_3^0 2p_4^0} \sum'_{\text{Spins}} |T_{S_i}|^2$$

Fluss d. entkoppelten Teilchen: ϕ

Wähle als Bezugssystem das Rekursystem von e_2 (finale Formel und Lorentz-invariant
sicher)

$$\phi = \frac{1}{V} \cdot |U_1| \quad \text{mit} \quad |U_1| = \frac{|P_1|}{P_1^0}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
Geschw. v.
Teilchen 1
Normierung
d. entl. Zustand

$$P_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daf. Schwerpunktsgesetz: $S := (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1 \cdot P_2 + P_2^2 = m_1^2 + 2m_2 E_1 + m_2^2$

$$\Rightarrow E_1 = (S - m_1^2 - m_2^2) / 2m_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |P_1| &= \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = \frac{1}{2m_2} \left\{ (S - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 \right\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2m_2} \left\{ S^2 + m_1^4 + m_2^4 - 2Sm_1^2 - 2Sm_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 \right\}^{1/2} \\ &=: \frac{1}{2m_2} w(S, m_1^2, m_2^2) \quad \text{mit} \quad \boxed{w(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz}} \quad \uparrow = P_2^0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{V} \frac{1}{P_1^0} \frac{w(S, m_1^2, m_2^2)}{2P_2^0}$$

$$\Rightarrow \boxed{d\delta = \frac{1}{2w(s, m_1^2, m_2^2)} \frac{\not{d}^3 p_3 \not{d}^3 p_4}{(2\pi)^6 2p_3^0 2p_4^0} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{Sp^{m_3}}' |T_{f,i}|^2} \quad (*)$$

Nun ist

$$\sum_{Sp^{m_3}}' |T_{f,i}|^2 = \sum_{Sp^{m_3}}' T_{f,i}^* T_{f,i}$$

$$= \sum_{Sp^{m_3}}' \left\{ \frac{1}{(p_4 - p_1)^2} \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p_4) - \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} \bar{u}(p_1) \gamma_\mu u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p_4) \right\}$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{(p_4 - p_1)^2} \bar{u}(p_4) \gamma_\nu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1) - \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} \bar{u}(p_4) \gamma_\nu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1) \right\}$$

$\left(\leftarrow \text{mit } \sum_{S=1/2} T_S(p) \bar{T}_S(p) = P + m = p^\mu \gamma_\mu + m \text{ und } \begin{cases} \mu := (p_4 - p_1)^2 \\ \nu := (p_3 - p_1)^2 \end{cases} \right)$

$$= \frac{e^4}{4} \left\{ \frac{1}{\mu^2} Sp [(p_2 + m) \gamma_\mu (p_3 + m) \gamma_\nu] \cdot Sp [(p_1 + m) \gamma^\mu (p_4 + m) \gamma^\nu] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\nu^2} Sp [(p_2 + m) \gamma_\mu (p_3 + m) \gamma_\nu (p_1 + m) \gamma^\mu (p_4 + m) \gamma^\nu] + (3 \leftrightarrow 4) \right\}$$

$$\text{Es ist } \text{Sp} [(P_1+m) \gamma_\mu (P_2+m) \gamma_\nu] = 4(g_{\mu\nu} m^2 + P_{2\mu} P_{3\nu} + P_{2\nu} P_{3\mu} - g_{\mu\nu} P_2 \cdot P_3)$$

$$\text{und } \text{Sp} [(P_1+m) \gamma_\mu (P_2+m) \gamma_\nu (P_3+m) \gamma^\mu (P_4+m) \gamma^\nu]$$

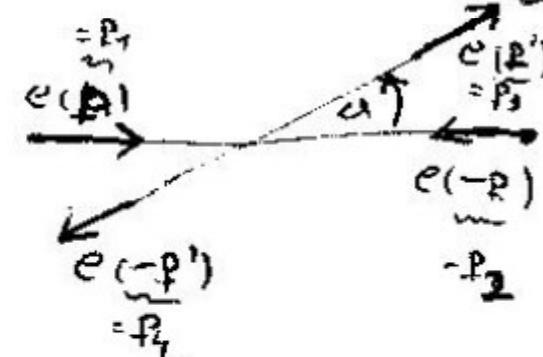
$$= 16 (-2 P_1 P_2 P_3 P_4 + m^2 P_1 \cdot P_3 + m^2 (P_1+P_3) \cdot (P_2+P_4) + m^2 P_2 \cdot P_4 - 2m^4)$$

(Übung.) Nach einigen Ablg. ergibt sich unter Verwendung v. s, u und t :

$$\sum |T_{fi}|^2 = \frac{64\pi^2 \alpha^2}{t^2 u^2} \left\{ (s-2m^2)^2 (t^2+u^2) + ut (-4m^2 s + 12m^4 + ut) \right\} \text{Zähler}$$

Einsetzen in ④ ergibt im Schwerpunktssystem:

$$ds = d\Omega \int d^3 p_3 |T_{fi}|^2 \int d^3 p_4 \frac{1}{2[s(s-4m^2)]^{1/2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2p_3^0 2p_4^0} \\ \delta(\sqrt{s} - p_3^0 - p_4^0) \delta^3(p_3 + p_4) \sum |T_{fi}|^2$$



$$\boxed{\frac{ds}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{st^2 u^2} \left\{ (s-2m^2)^2 (t^2 u^2) + ut (-4m^2 s + 12m^4) + ut \right\}}$$
(Möller 1932)

$$E = \sqrt{s}/2, \quad t = -4|p_1|^2 \sin^2 \theta/2, \quad u = -4|p_1|^2 \cos^2 \theta/2$$

symmetrische Grenze von α bzw. t :

Quantenmechanisch sind die beiden Elektronen im Anfangs- und Endzustand als identische Teilchen anzusehen. Die Frage, ob das von rechts oder von links laufende Elektron unter dem Winkel α aufgestellter Zähle trifft, ist sinnlos.

Wir können nur feststellen, daß ein Elektron unter dem Winkel α , aber unter dem Winkel $\pi - \alpha$ vom Wellenzweigspunkt wegfliegt

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}} \text{ erfüllt sich alle } \underline{\text{verschiedenen}} \text{ Endzustände.} \Leftrightarrow \boxed{0 \geq t \geq -\frac{1}{2}(s - 4m)}$$

Nichtrelativistischer Grenzfall:

$$|P| \ll m: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2 m^2}{16 |P|^4} \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sin^4 \alpha_{1/2}} + \frac{1}{\cos^4 \alpha_{1/2}}}_{= \text{klassische Rutherford-Streuformel}} - \underbrace{\frac{1}{\sin^2 \alpha_{1/2} \cos^2 \alpha_{1/2}}}_{}$$

= klassische
Rutherford-Streuformel

QM Zustand
v. Interferenz der
beiden Elektronen
(Mott
1930)

Zurück kommt v. QM - Addition der Amplituden, die den beiden Feynman-Diagrammen entsprechen, und anschließender Betrags-Bildung um Stromdichten zu berechnen. Vorzeichen wird bestimmt durch die Fermi-Stufigkeit der Elektronen, }. Boson wäre es positiv.
 Extrem relativistischer Grenzfall

$$|\beta| \gg m : \quad \frac{dd}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \omega_2} + \frac{1}{\cos^4 \omega_2} + 1 \right\}$$

$$= \frac{\alpha^2}{s} \frac{(3 + \cos^2 \omega)^2}{\sin^4 \omega}$$

n.b.: $s \cdot \frac{ds}{d\Omega}$ hängt nicht mehr von s ab \Rightarrow Skalenverhalten des Sturzquerschnitts.

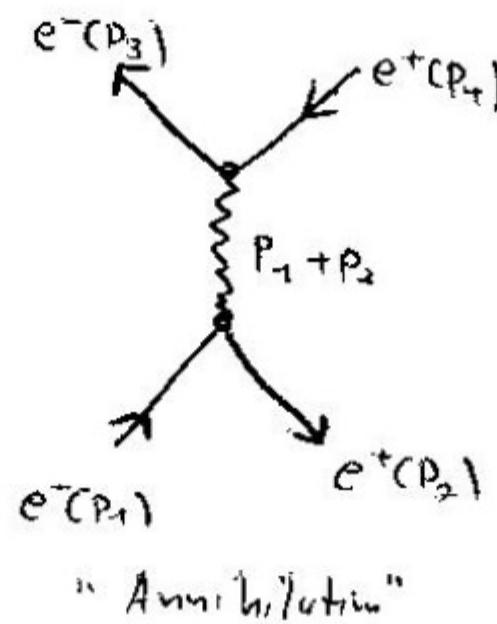
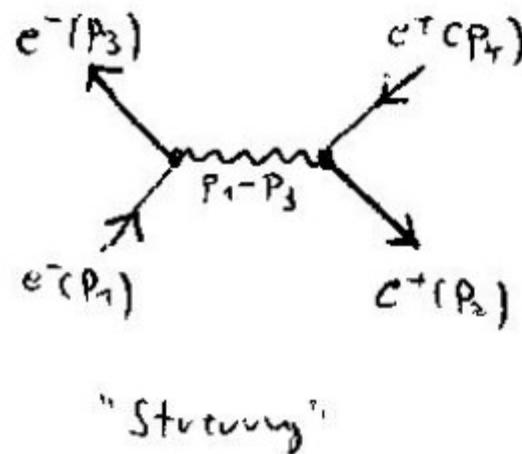
Skalenverhalten wird als Ausdruck f. die punktförmige Natur der Elektronen gedacht. Hätte nämlich das Elektron eine „Ausdehnung“ der Größe $r = \frac{1}{\Lambda}$, so würde man erwarten, daß $s \cdot \frac{ds}{d\Omega}$ eine nichtlineare Funktion der dimensionslosen Variablen s/Λ^2 wäre, d.h. $s \cdot \frac{ds}{d\Omega}$ wäre nicht unabh. v. s . Vorhersagen der Theorie f. Elektron-Elektron-Sturz wurden im Experiment durchweg bestätigt.

Elektron - Positron - Stoerung (Bhabha - Stoerung)

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \longrightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4)$$

kinematisch dieselbe wie bei Elektron-Elektron Stoerung

Diagramme niedrigster Ordnung:



$$\text{Stoerung: } (p_1 - p_3)^2 \leq 0$$

$$\text{Annihil. } (p_1 + p_2)^2 \geq 4m_e^2$$

Für unpolarisierte Elektronen und Positronen im extrem relativistischen Grenzfall
im Schwerpunktssystem:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1 + \cos^4 \alpha_{1/2}}{\sin^4 \alpha_{1/2}} + \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \alpha) - \frac{\cos^4 \alpha_{1/2}}{\sin^2 \alpha_{1/2}} \right\}$$

$$= \frac{\alpha^2}{16s} \frac{(3 + \cos^2 \alpha)^2}{\sin^4 \alpha_{1/2}}$$

s. $s \gg 4m^2$

zwei unterscheidbare Teilchen im Ausgangs- und Endzustand \Rightarrow kinematischer Bereich
 $\Rightarrow 0 \leq \alpha < \pi$.

Studium der Blubba-Streuung am Synchrotron PETRA.

Höchste Schwerpunktenergie $\sqrt{s} \approx 45 \text{ GeV}$.

Übereinstimmung v. Experiment u. Theorie sehr gut.

Angenommen, QED würde bei einer Energieskala Λ modifiziert
denn für $s \ll \Lambda^2$: $\frac{d\sigma}{d\Omega} / \frac{d\sigma^{\text{QED}}}{d\Omega} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{s}{\Lambda^2}\right)$

Experimentelle Genauigkeit: $s \approx 10^3 \text{ GeV}^2 \Rightarrow s/\Lambda^2 \lesssim 0.05$

$$\text{d.h. } \Lambda \gtrsim 150 \text{ GeV}$$

$$\text{bzw. } 1.3 \cdot 10^{-16} \text{ cm.}$$

Aber: In diesem Energiebereich muss QED
bereits durch elektroschwache WW erweitert werden.

Compton - Streuung

$$\gamma(\underline{k}) + e^-(p) \rightarrow \gamma(\underline{k}') + e^-(p')$$

i

Elektron ruht im
Labor-System.

$$p = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p' = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + p'^2} \\ p' \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} \omega \\ \underline{k} \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} \omega' \\ \underline{k}' \end{pmatrix}$$

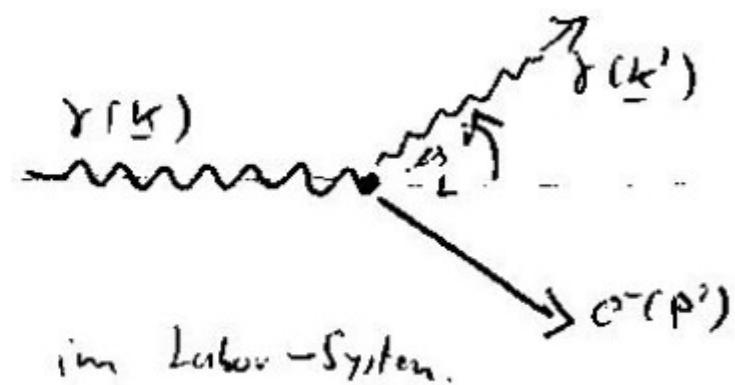
$$\approx m + \omega = \sqrt{m^2 + (\underline{k} - \underline{k}')^2} + \omega$$

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega \omega'} = \frac{1}{m} (1 - \cos \varphi_L)$$

$$\approx \omega' = \omega \left[1 + \frac{\omega}{m} (1 - \cos \varphi_L) \right]^{-1}$$

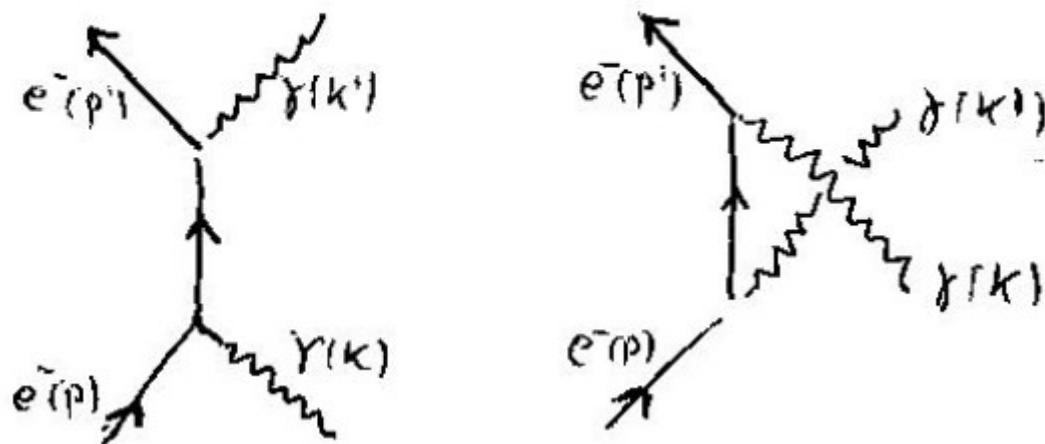
$$\text{bzw. } d' - d = \frac{2\pi}{m} (1 - \cos \varphi_L) \rightarrow \text{Compl.}$$

$$\lambda_m \stackrel{?}{=} \text{Wellenlänge} = 3.86 \cdot 10^{-11} \text{ cm.}$$



im Labor-System.

Feynman-Grafiken niedrigster Ordng f. den Streuquerschnitt:



unpolarisierte Elektronen und Photonen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{[m + \omega(1 - \cos\alpha_L^0)]^2} \cdot \left\{ \frac{\omega^2(1 - \cos\alpha_L^0)^2}{m[m + \omega(1 - \cos\alpha_L^0)]} + 1 + \cos^2\alpha_L^0 \right\}$$

(Klein, Nishina 1929)

nichtrel. Grenzfall; $\omega \ll m$: $\omega' = \omega$, $\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{\alpha^2}{m^2} \frac{1 + \cos^2\alpha_L^0}{2}$, $\sigma_{\text{tot}} = \frac{\sigma_T}{3} \frac{\alpha^2}{m^2}$

Extrem relativist. Fall $\omega \gg m$ bzw. $\alpha \ll 1/m$:

$$1 - \cos \varphi_L \ll \frac{m}{\omega} \Rightarrow \varphi' \approx \varphi, \frac{d\varphi}{d\Omega_L} \approx \frac{\alpha^2}{m^2}$$

$$1 - \cos \varphi_L \gg \frac{m}{\omega} \Rightarrow \varphi' \approx \frac{2\pi}{m} (1 - \cos \varphi_L) \leftarrow \text{wabh. v. d. Wellenlänge des einlaufenden Photons.}$$
$$\frac{d\varphi}{d\Omega_L} \approx \frac{\alpha^2}{2m\omega(1 - \cos \varphi)} \propto \frac{1}{\omega}$$

Bem Elektron - Position Probleme mit äußeren Feldern
z. "Hauptschwierigkeiten" v. reellen + & Compton - Streuung.

Probleme mit äußeren Feldern

Bisher: Reaktionen im Vakuum.

I.d. Praxis oft vorgegebene äußere Felder (Kondensatoren, Elektromagnete, Atomkerne).

- Bsp.: (1) Struktur eines Elektrons an vorgegebenen Ladungsverteilung (\rightarrow schwerer Kern)
- (2) Emission v. Synchrotronstrahlung eines Elektrons im Spurkatalog
- (3) Emission v. Bremsstrahlung eines Elektrons, das im Feld eines Kernes abgebremst wird \rightarrow Erzeugung von Röntgenstrahlen in Röntgenröhren
- (4) Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares durch ein Photon im Feld eines schweren Kernes \rightarrow Entdeckung des Positrons (Anderson, 1932)
Dient heute i.d. Hochenergiephysik zum exp. Nachweis v. Photonen.

$$\text{Ausgangspunkt: } H'(t) = \int d^3r \ j^\mu(r,t) A_\mu(r,t)$$

$$A_\mu(r,t) = \underbrace{A_\mu'(r,t)}_{\text{Quantenfeld}} + \underbrace{A_\mu^{\text{ext}}(r,t)}_{\text{äußeres Potenzial}}$$

A_μ^{ext} hat als Quellen die äußeren Ladungen und Ströme: j_μ^{ext}

mit Lorentz-Brd.: $\square A_\mu^{\text{ext}}(x) = j_\mu^{\text{ext}}(x)$
 $\partial^\mu A_\mu^{\text{ext}}(x) = 0$

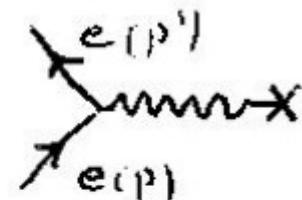
Wieder Dirac- od. WW-Bild: $i \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = H'(t) |t\rangle$

Struktur v. H' : $H' \sim : (b + a^\dagger)(b^\dagger + a) : A^{\text{ext}}$
 $\sim -b^\dagger b A^{\text{ext}} + a^\dagger b^\dagger A^{\text{ext}} + b a A^{\text{ext}} + a^\dagger a A^{\text{ext}}$
 $(4') \qquad (3') \qquad (2') \qquad (1')$

Interpretation:

- (1') Störung einer Elektronen am äußeren Potential
- (2') Vernichtung eines Elektronen-Positron-Paares durch äußeres Potential
- (3') Erzeugung " "
- (4') Störung einer Position am äußeren Potential

Diagrammatische Veranschaulichung:



Formeln-Regel:

$$\begin{aligned} & ieg^\mu \int dx e^{i(p'-p)x} A_\mu^{\text{ext}}(x) \\ &= -ieg^\mu \frac{1}{(p-p')^2} \int dx e^{i(p'-p)x} \cdot j_\mu^{\text{ext}}(x) \end{aligned}$$

Tritt ein solcher Vertex im Diagramm auf, ist die δ -Fkt. der Energie-Impulseinheit im S-Matrix-Element wegzulassen.

Strukturkorrekturen / Renormierung

Bisher: Rekursion i.d. QED in niedrigster Ordg.,
Resultate endlich, gute Übereinstimmung mit dem Exp.

Aber: Theorie höherer Ordg. i.d. Theorie vorhanden
Bei Präzisionsmessungen zu berücksichtigen.

Bei Berechnung höherer Ordnungen, den sog. Strukturkorrekturen, treten Unendlichkeiten auf.

Systematisches Verfahren zur Berechnung höherer Ordg. mit endlichem Resultat:

Renormierung

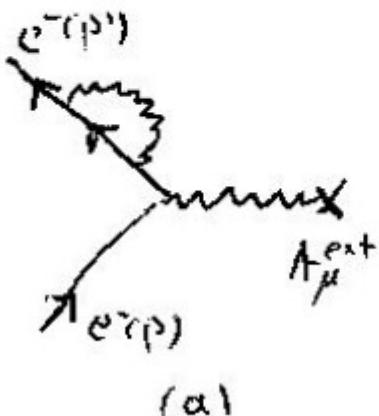
Bsp. Störung eines Elektrons am äußeren Potenzial

Niedrigste Ord.

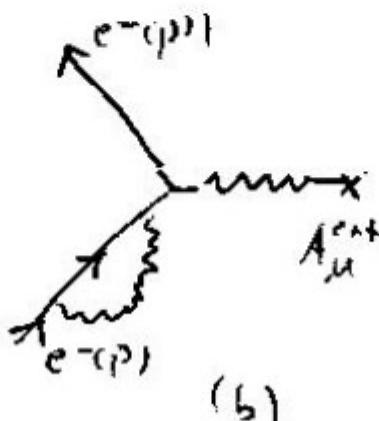
$\frac{e}{mc}$ max
ok

Mittlere Ord.:

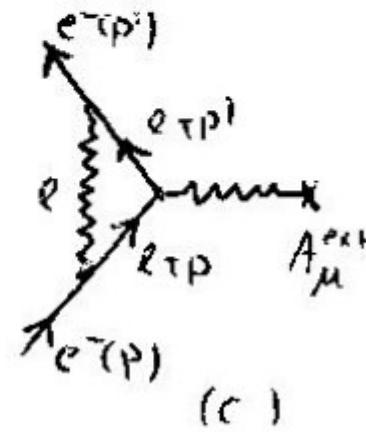
(+)



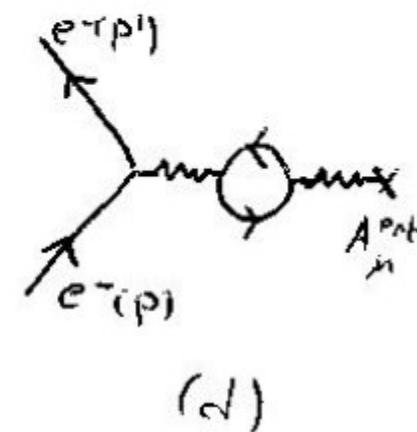
(a)



(b)



(c)



(d)

Betrachtete Diagramme (c):

Nach den Feynman-Regeln ist über den Schleifenimpuls zu integrieren:

Schematische (f.d. Amplitude):

$$A^{(c)} \sim \int d^4 l \frac{1}{l^2} \frac{\not{p} + \not{l} + m_e}{p^2 + 2pl + l^2 - m_e^2} \frac{\not{p'}^2 - \not{l} + m_e}{p'^2 - 2p'l + l^2 - m_e^2}$$

Integral divergent für $\ell \rightarrow \infty$ logarithmisch ($\int d\ell \frac{1}{\ell^2} \frac{\ell}{\ell^2} \frac{\ell}{\ell^2}$)

→ "Ultraviolet-Katastrophe"

Integral divergent sogar für $\ell \rightarrow 0$ Wg. $p^2 = p'^2 = m_e^2$ folgt $A^{(n)} \sim \int_{\ell=0}^{\infty} d\ell \frac{1}{\ell^2} \frac{1}{p^2 p' p \ell}$

→ "Infrarot-Katastrophe"

Infrarot-Katastrophe lässt sich einfach beseitigen (Wort: "weiche Photonen").

Quantenmech. Überlegung zur Infrarot-Divergenz:

Was bedeutet wir, wenn wir sagen, ein Detektor hat ein Elektron angezeigt?

→ endl. Energyauflösung ΔE .

Exp. nicht unterscheidbar, ob Elektron isoliert oder begleitet von sehr "weichen" Photonen mit Energie $\omega \leq \Delta E$

$$\Rightarrow \delta_{\text{exp}} = \delta(1 \text{ Elektron})$$

$$= \delta(1 \text{ Elektron} + 1 \text{ Photon der Energie } \omega \leq \Delta E) \quad (4)$$

$$= \delta(1 \text{ Elektron} + 2 \text{ Photonen mit Ges.-Energie } \leq \Delta E) \dots$$

Rely. ergibt

$$d(1 \text{ Elektron} + 1 \text{ Photon mit Energie } \omega \text{ mit } \omega_{\min} \leq \omega \leq \Delta E) \propto \tilde{J} \left(\frac{\Delta E}{\omega_{\min}} \right) \xrightarrow[\omega_{\min} \rightarrow 0]{} \infty \quad (**)$$

Theorie soll endliche Resultate für brauchbare Größen liefern.

Ist der Fall, wenn Streuquerschnitt über Endzustände in (⊕) summierbar ist.

Rely zeigt:

In jeder Ortg. in α heben sich die Infrarot-Divergenzen in (1 Elektron) in den Diagrammen (⊕) etc. gegen die Infrarot-Divergenzen in (⊖) weg.

Um in den Zwischenstufen keine Probleme mit infarotdivergenten Integralen zu haben, führt man eine kleine Photonenmasse ein, die im Endresultat gleich Null gesetzt werden kann. Dieses Endresultat enthält dann auch die Auflösung ΔE des Apparats.

Bewältigung der UV-Katastrophe schwieriger \rightarrow Inhalt der Renormierungstheorie

Grundidee:

Mit divergenten Integralen kann man nichts anfangen

\Rightarrow müssen per Hand endlich gemacht werden, d.h. reguliert werden.

Verschiedene Regulierungsverfahren sind vorgeschlagen worden:

z.B.: Man kann alle divergenten Integrale bei einem Abschneideparameter Λ abbrechen:

$$\int dl \frac{1}{\ell^2} \frac{1}{p+\ell-m} \frac{1}{p'-\ell-m} \rightarrow \int_{|\ell| \leq \Lambda} dl \frac{1}{\ell^2} \frac{1}{p+\ell-m} \frac{1}{p'-\ell-m}$$

Resultat hängt ^{noch} logarithmisch v. Λ ab.

(andere Abschneideverfahren: Regulierung nach Pauli-Villars, dimensionale Regulierung, {
grosser} QED)

Nach der Regularisierung hat man eine Theorie, in der alles endlich ist.

Parameter der Theorie:

$$e_0, m_0, \Delta$$

/ |

Ladung - Massen - Parameter des Elektrons
(wie in der Hamilton-Fkt. bzw. den Feynmann - Regeln).

Grundlage der Renormierungstheorie:

e_0 und m_0 sind nicht identisch mit der beobachtbaren Ladung e und Masse m des Elektrons!

Wie misst man die Ladung des Elektrons?

z.B. im Magnetfeld über

$$\underline{K} = (-e) (\underline{v} \times \underline{B}) \quad (22)$$

Im Rahmen der QED : Streuung eines Elektrons an einem äußeren Potential.
 Rely. mit der regularisierten Theorie liefert fürwährlt eine Kraft der Gestalt ~~(xx)~~, aber
 es gilt $e \neq e_0$; es ergibt sich (mit Konst. a_1, a_2 etc.):

$$e = e_0 \left(1 + a_1 e_0^2 \ln \frac{\Lambda}{m_0} + a_2 e_0^4 \left(\ln \frac{\Lambda}{m_0} \right)^2 + \dots \right) \quad (e)$$

Analog findet man für die brauchbare Masse m (mit Konst. b_1, b_2, \dots)

$$m = m_0 \left(1 + b_1 e_0^2 \ln \frac{\Lambda}{m_0} + \dots \right) \quad (m)$$

Im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ scheinen e und m zu divergieren, was sinnlos.

Ausweg: e_0 und m_0 haben bloß mathematische Existenz

Berechnen den Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ so, daß brauchbare Größen e, m festgehalten,
 und die mathematischen Parameter e_0, m_0 mit Λ variieren.

\Rightarrow Ursprüngliche Größen e_0, m_0 divergieren $\nexists \Lambda \rightarrow \infty$,
 irrelevant, da nicht braubar.

\Rightarrow Programm: Berechnen eine Übergangssamplitude A mit Hilfe der aus bekannten Technik in der regularisierten Theorie als Fktn. F der "rechten" Parameter e_0, m_0 und Δ (dem Absturzparameter):

$$A = F(e_0, m_0, \Delta, \dots) \quad (A)$$

? außer Impuls u. Polarisierung.

Durch Inversion von (e) und (m) denken wir uns die rechten ("bare") Parameter durch die physikalischen ausgedrückt:

$$e_0 = e_0(\epsilon, m, \Delta)$$

$$m_0 = m_0(\epsilon, m, \Delta)$$

Einsetzen in (A) ergibt A als Fktn. der Parameter ϵ, m, Δ :

$$A = F(e_0(\epsilon, m, \Delta), m_0(\epsilon, m, \Delta), \Delta, \dots)$$

Jetzt $\Delta \rightarrow \infty$, dabei ϵ und m festhalten.

Zentrales Theorem der Renormierungstheorie:

Der Limes der Entwicklung nach e existiert in allen Ordnungen.

(v.N. nach Abspaltung eines geeigneten Skalenfaktors Z , der nicht von äußeren Impulsen abh.)

Wir definieren die renommierte Amplitude A' als Funktion F' der physikalischen Parameter e, m und der äußeren Variablen:

$$\begin{aligned} A' &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z(e, m, \Lambda) F(e_0(e, m, \Lambda), m_0(e, m, \Lambda), \Lambda, \dots) \\ &= F'(e, m, \dots) \end{aligned}$$

Renormierungstheorie liefert eine Entwicklung der renommierten Amplituden nach Potenzen von e :

$$F'(e, m, \dots) = F_0'(m, \dots) + e F_1'(m, \dots) + e^2 F_2'(m, \dots) + \dots$$

wobei alle F_i' endl. sind.

Über Konvergenz der Reihe ist nichts ausgesagt (meist nicht konvergent sondern asymptotisch)

Mathematische Durchführung i. A. verzweifelt.

Theorie ist durch Exp. glänzend bestätigt.

Grundlagen der starken WW / Quantenschwingertheorie

Mesonen ($p, n, \pi^+, \pi^0, \pi^-$, $\Lambda, \Sigma^{0,-}$, k, \dots) sind zusammengesetzte Teilchen, die fundamentalen Teilchen sind Quarks

dabei Mesonen $\sim q\bar{q}$ (Quark-Antiquark)

Baryonen $\sim qqq$ (3-Quark-Zustände)

zunächst postulierte man 3 verschiedene Quarks Quark-Flavors

Name	Spin	Ladung	Barionenanteil	Strangeness
u "up"	1/2	2/3	1/3	0
d "down"	1/2	-1/3	1/3	0
s "strang."	1/2	-1/3	1/3	-1

z.B. für π - und K -Mesone : $\pi^+ \sim u\bar{d}$

u d J. Barium $P \sim (uudd)_8$

$n \sim (ddu)_8$

$\Lambda \sim (uds)_8$

$$\pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\pi^- \sim d\bar{u}$$

$$K^+ \sim u\bar{s}$$

$$K^0 \sim d\bar{s}$$

(zu Baryon)

Das Ω^- -Teilchen hat Spin $-\frac{1}{2}$ und Strangeness $S = -3$

$$\Rightarrow \Omega^-(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \sim \underbrace{\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ s & s & s \end{matrix}}_{\text{total symm.}} \underbrace{\psi(r_1, r_2, r_3)}_{\text{total antisymm.}}$$

totale Wellenfkt. der 3 Quarks,
symm. Bahndrehimpuls $\mathcal{O} \Rightarrow$ totale symm.

Das wäre eine totale symmetrische Wellenfkt. für Teilchen mit halbzahligem Spin $\frac{1}{2}$

- Pauli
- Dialektik

Ausweg: Einführung v. "Farbe" in 3 verschiedenen Versionen

$$u_1, u_2, u_3 ; d_1, d_2, d_3 ; s_1, s_2, s_3$$

$$\Rightarrow \Omega^-(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \sim \underbrace{\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ s_\alpha & s_\beta & s_\gamma \end{matrix}}_{\text{total antisymm.}} \underbrace{\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \psi(r_1, r_2, r_3)}_{\text{total symm.}} \checkmark c \{u, d, s\}$$

$$\text{Zkt. Invariant unter Drehungen im Farbraum } q_\alpha \rightarrow \sum_{\beta=1}^3 q_\beta u_{\beta\alpha}$$

$u \in \text{SU}(3) \leftarrow \text{Farb-SU}(3)$ fundamentale Rolle in QCD.

$$\text{z.B. } \pi^+ \sim u_1 \bar{d}_1 + u_2 \bar{d}_2 + u_3 \bar{d}_3 \text{ invariant unter SU}(3)$$

Experimente ergeben, daß neben den Quarks noch andere, Flavon neutrale Konstituenten ('Partonen') des Nukleons dringend vermessen!
(Tragen Teil des Gesamtimpulses des Nukleons).

⇒ Diese sind verantwortlich für die WW der Quarks im Nukleon untereinander
— Gluonen —

Diese ergeben sich in natürlicher Weise aus einer $\text{SU}(3)$ -Familie } die
starke WW, die QCD.

Lagrangian-Dichte der QCD

Kinetischer Term für die Quarks: $\mathcal{L}_q^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^f \bar{q}^j(x) (\not{i}g^\mu \partial_\mu - m_j) q^j(x)$

$j = 1, \dots, f$ Quark-Flavors, Masse m_j

$$q^1 = u, q^2 = d, q^3 = s, q^4 = c, \dots$$

Quark-Felder q^j haben drei Farb-Komponenten $q^j = \begin{pmatrix} q_1^j \\ q_2^j \\ q_3^j \end{pmatrix}$

Da die physikalischen Bindungszustände der Quarks (\rightarrow B. Mesonen, Baryonen) invariant unter $SU(3)$ -Rotationsen im Farbraum sind, sollte dies die Folge einer Invarianz der fundamentalen Lagrange-Dichte sein.

In der Tat ist $\mathcal{L}_q^0(x)$ invariant unter $q^j(x) \rightarrow u \cdot q^j(x) \quad (j=1, \dots, f)$
mit $u u^* = 1$, $\det u = 1$, $u = \text{const.}$
d.h. $u \in \text{SU}(3)$.

Die globale Eichinvarianz ist, wie die globale $U(1)$ -Invarianz des Dirac-Feldes
in der QED, vom relativistischen Standpunkt unbefriedigend.

\Rightarrow Fordern lokale Eichinvarianz der Theorie
$$q^j(x) \rightarrow u(x) q^j(x), \quad u(x) \in \text{SU}(3)$$

In der QED wird dieses Eichprinzip durch die Einführung der Photonen etabliert.
Hier wird es auch die Einführung der Gluonen passieren!

\rightsquigarrow (Weyl): Physisches Postulat der Invarianz unter Farbtransformation
des Quarkfeldes kann als "Grund" für die Existenz
der Gluonen angesehen werden!

Offenbar ist $\mathcal{L}_q^0(x)$ nicht invariant unter $q^i(x) \rightarrow u(x) q^i(x)$

$$\mathcal{L}_q^0(x) \longrightarrow \sum_{j=1}^f \bar{q}^j(x) (i g^\mu \partial_\mu - m_j + i g^\mu u^*(x) \partial_\mu u(x)) q^j(x)$$

In QED benötigen wir ein Photonenfeld A^μ zur Herstellung der lokalen Einvarianz gemäß der Anzahl von Generatoren der Einheitsgruppe $U(1)$.

Hier, in L. QCD brauchen wir 8 Gluonenfelder entsprechend den acht linear unabhängigen Erzeugenden der $SU(3)$ -Farbgruppe : $G_\mu^\alpha(x)$ (mit $\alpha = 1, \dots, 8$) , 8 Gluon-Fusen diese zu einer 3×3 hermitischen spurenlosen Matrix zusammen, $\overline{\text{ren-Potentiale}}$.

$$G_\mu(x) = G_\mu^\alpha(x) \frac{\delta \alpha}{2} = G_\mu^+(x), \dots, \text{Sp } G_\mu(x) = 0$$

Die σ_i sind die Gell-Mann- δ -Matrizen, die im Farbraum wirken.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(n.b. infinitesimale Trafo der $SU(3)$: $U = 1 + i g_s \frac{1}{2} \delta_a$,
 \sim endl. Trafo $U = \exp(i g_s \frac{1}{2} \delta_a)$).

Kopplung der Gluonen an die Quarks (in Analogie zu QED) durch

minimale Ankopplung $\boxed{\partial_\mu \rightarrow D_\mu := \partial_\mu + ig_s G_\mu(x)}$

"kovariante
Abbildung" dimensionlos
Kopplungskonst. (\equiv Ladung in QED)

$$\sim \mathcal{L}_q(x) := \sum_{i=1}^8 \bar{q}^i(x) (ig^\mu D_\mu - m_i) q^i(x)$$

\mathcal{L}_q ist invariant unter lokalen Eichungen: $q^a(x) \rightarrow U(x) q^a(x)$ wenn wir das
Gluon-Potential wie folgt transformieren:

$$G_\mu(x) \rightarrow G'_\mu(x) = U(x) G_\mu(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g_s} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x) \quad (\star\star)$$

$G'_\mu(x)$ ist wieder hermitisch und hat $\text{Sp} u = 0$ f. btl. $U(x) \in \text{SU}(3)$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(u \cdot u^\dagger) = 1 &\Rightarrow u(x)(\partial_\mu u^\dagger(x)) + (\partial_\mu u(x)) u^\dagger(x) = 0 \Rightarrow G'_\mu(x) = G_\mu(x) \\ \text{and } &\Rightarrow \text{Sp}(u(x) \partial_\mu u^\dagger(x)) = 0 \quad \rightarrow \text{Sp } G'_\mu = \text{Sp } G_\mu + \frac{i}{g_s} \text{Sp } u \partial_\mu u^\dagger = 0 \end{aligned}$$

Das Gluon-Feld $G'_\mu(x)$ muss selbst eine dynamische Variable sein.

Konstruktion des Anteils der Lagrange-Dichte, der die Gluon-Dynamik enthält,
geschieht in Analogie zur QED

Def. Gluon - Feldstärke - Tensor $G_{\mu\nu}(x)$:

$$\boxed{G_{\mu\nu}(x) := \partial_\mu G_\nu(x) - \partial_\nu G_\mu(x) + ig_s [G_\mu(x), G_\nu(x)]} \quad \textcircled{d}$$

(^{nt} für festes x hermitesche, spezielle Matrix)

→ def. durch Komponenten durch

$$G_{\mu\nu}(x) = G^a_{\mu\nu}(x) \frac{\delta_a}{2}$$

mit (v. \textcircled{d})

$$G^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu G^a_\nu(x) - \partial_\nu G^a_\mu(x) - g_s f_{abc} G^b_\mu(x) G^c_\nu(x)$$

wobei f_{abc} die Strukturkonstanten der SU(3).

(ergaben sich aus der Algebra der Generatoren durch $[J_a, J_b] = 2i f_{abc} J_c$)

Der Term quadratisch in den Gluon-Potentialen hat kein Analogon in der QED, und ist typisch für den nicht-abelschen Charakter der Farbgruppe $SU(3)$. Dieser Term ist notwendig um ein einfaches Trafo-Verhalten v. $G_{\mu\nu}$ unter Eich-Trafos zu erreichen:

Dann

Nach Trafo der Gluonpot. $\textcircled{**}$ ergibt sich $G_{\mu\nu}(x) \rightarrow U(x) G_{\mu\nu}(x) U^*(x)$

Dann ist die eichinvariante Lagrangs-Dichte für Quarks und Gluone:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD}(x) &= -\frac{1}{2} \text{Sp} (G_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu}(x)) + \sum_{j=1}^f \bar{q}^j(x) (\not{g}^\mu D_\mu - m_j) q^j(x) \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G^{a\mu\nu}(x) + \sum_{j=1}^f \bar{q}^j(x) (\not{g}^\mu (\partial_\mu + g_S G_\mu^a \frac{\not{g}_a}{2})) q^j(x) \end{aligned}$$

↳ grundlegende Lagrangs-Dichte der QCD, Struktur ähnlich QED.

V41: QCD
QED

Quantenzahl
Fermionen
Vektor-Bosonen
Eichgruppe
Kopplungskonst.

QED

elektrische Ladung
Elektronen
Photon (ungeteilt)
 $U(1)$ (abelsch)
 $e, \alpha = e^2/4\pi$

QCD

Farbe
Quarks (Farb-Triplets)
Gluonen (Farb-Diquark)
 $SU(3)$ (nicht-abelsch)
 $g_s, \alpha_s = g_s^2/4\pi$