Abgabe bis Mittwoch, 13.04.2020, 18 Uhr über die Moodle-Plattform.

1. [*8 Punkte*] **Teilchen auf einer Ellipse**

Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in der xy-Ebene auf einer elliptischen Bahn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit der Kreisfrequenz ω.

1 (a) Wie lautet die Bahnkurve $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, wenn $x(t) = a\cos(\omega t)$ ist?

1 (b) Welche Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ wirkt auf den Massenpunkt? Ist die Kraft anziehend oder abstoßend? Wo liegt das Kraftzentrum?
Hinweis: Benutzen Sie das zweite newtonsche Gesetz.

1 (c) Überprüfen Sie, ob die Kraft $\mathbf{F}$ konservativ ist.

2 (d) Berechnen Sie das Potential $V(\mathbf{r})$ am Ort $\mathbf{r}$ bezüglich des Potentialnullpunktes am Ort $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$.
Hinweis: Eine konservativ Kraft ist darstellbar als $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$. In dem Fall sind Arbeitintegrale wegungabhängig und die potentielle Energie $V(\mathbf{r})$ kann nun als die Arbeit $-W$ bestimmt werden, die man aufbringen muss, um das Teilchen gegen die Kraft $\mathbf{F}$ zum Punkt $\mathbf{r}$ zu bringen:

$$-W = -\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}' = V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{a}),$$

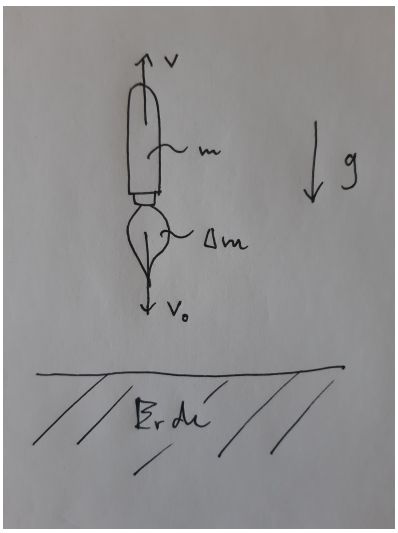
wobei C einen beliebigen Weg zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{r}$ bezeichnet. Das Potential ist nur bis auf eine Konstante $V(\mathbf{a})$ festgelegt.

1 (e) Berechnen Sie die kinetische T und Gesamtenergie $E = T + V$ des Massenpunktes.

2 (f) Berechnen Sie den Drehimpuls $\mathbf{L}$ und das Drehmoment $\mathbf{M}$ des Massenpunktes. Warum muss die Richtung und der Betrag von $\mathbf{L}$ konstant sein?

2. [*8 Punkte*] **Raketenproblem**

Eine Rakete der Masse $m(t)$ bewege sich mit einer Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t von der Erde weg senkrecht nach oben. Es wird ein homogenes Schwerefeld angenommen und der Einfluss des Luftwiderstandes wird vernachlässigt. Die Rakete der Anfangsmasse m_0 stößt pro Zeiteinheit die Gasmenge $\alpha = \frac{\Delta m}{\Delta t} > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v_0 (relativ zur Rakete) nach unten aus.



3 (a) Zeigen Sie, dass sie Bewegungsgleichung der Rakete die folgende Form hat

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_0 - mg = \alpha v_0 - mg\,.$$

2 (b) Integrieren Sie die Gleichung um einen Ausdruck für $v(m)$ zu erhalten. Die Anfangsgeschwindigkeit der Rakete sei $v(m_0) = 0$.

2 (c) Schätzen Sie ab, wie viel mal größer die Anfangsmasse der Rakete m_0 gegenüber der Masse der leeren Rakete sein muss um die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde $v_2 = 11.2\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ für $v_0 = 2.1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ und $\alpha = \frac{m_0}{60}\,\mathrm{s^{-1}}$ zu erreichen.

1 (d) Berechnen Sie $v(t)$ aus $v(m)$ mit Hilfe von $m(t) = m_0 - \alpha t$ und entwickeln Sie $v(t)$ für kleine Zeiten. Diskutieren Sie das Ergebnis.
Hinweis: $\ln(1 + x) \approx x$ für $|x| < 1$

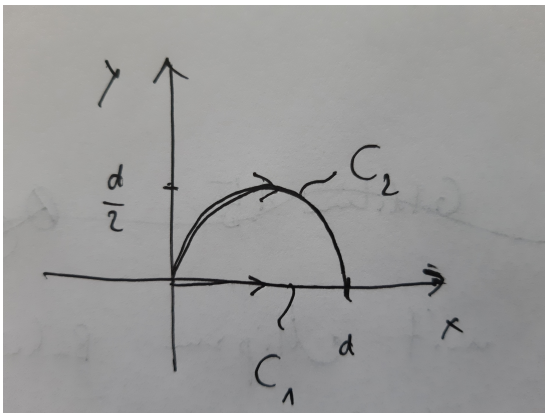
Dr. Adam Wysocki, E2 6, Zi.4.26
a.wysocki@lusi.uni-sb.de

3. [*4 Punkte*] **Weg(un)abhängigkeit der Arbeit**

Das Wegintegral

$$W = \int_C \mathrm{d}W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

soll für die Federkraft $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ und verschiedene Wege C_1 und C_2 berechnet werden. Als Wege sollen eine Gerade C_1 und ein Halbkreis C_2 mit Radius $d/2$ betrachtet werden, und zwar mit dem Anfangspunkt $\mathbf{r}_a = (0, 0, 0)$ und dem Endpunkt $\mathbf{r}_e = (d, 0, 0)$. Das Wegintegral gibt die Arbeit an, die geleistet werden muss, um ein Teilchen längs des Wegs zu verschieben. Interpretieren Sie das Ergebnis.



Dr. Adam Wysocki, E2 6, Zi.4.26
`a.wysocki@lusi.uni-sb.de`