

Abgabe bis Mittwoch, 20.04.2020, 18 Uhr über die Moodle-Plattform.

1. [3 Punkte] Reduzierte Masse

Zeigen Sie, dass die kinetische Energie zweier Teilchen mit Massen m_1 und m_2 in zwei Anteile aufgespalten werden kann: in die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung und der Relativbewegung. Führen Sie die Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ und die reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ein.

2. [11 Punkte] N wechselwirkende Teilchen

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von N Teilchen (z.B. Atome, Moleküle, Sterne oder Personen). Zwei Teilchen mit Index i und j wechselwirken miteinander über ein Paarpotential der Form $W(r_{ij})$, das nur vom Abstand $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ der beiden Teilchen abhängt ($\mathbf{r}_i$ bezeichnet die Ortskoordinate des i -ten Teilchens). Die Massen der Teilchen können unterschiedlich sein.

- 2 (a) Betrachten Sie ein exemplarisches Teilchenpaar. Wie lautet die Kraft $\mathbf{F}_{ij}$, die von Teilchen j auf Teilchen i bzw. $\mathbf{F}_{ji}$, die von Teilchen i auf Teilchen j ausgeübt wird?
- 0.5 (b) Skizzieren Sie die Kräfte $\mathbf{F}_{ij}$ und $\mathbf{F}_{ji}$ relativ zum Vektor $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Nehmen Sie eine abstoßende Wechselwirkung an.
- 0.5 (c) Betrachten Sie von nun an alle möglichen Wechselwirkungen zwischen den Paaren. Wie viele verschiedene Handschläge sind in einem Raum mit N Personen möglich? Wie lautet die potentielle Energie $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ des Gesamtsystems?
- 4 (d) Berechnen Sie die Zeitableitung der Gesamtenergie $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T + V)$, des Gesamtimpulses $\frac{d}{dt}\mathbf{P}$ und des Gesamtdrehimpulses $\frac{d}{dt}\mathbf{L}$.
- 4 (e) Berechnen Sie $\frac{d}{dt}E$, $\frac{d}{dt}\mathbf{P}$ und $\frac{d}{dt}\mathbf{L}$, falls sich das System in einem äußeren, zeitunabhängigen, Potential $U(\mathbf{r})$ befindet.

3. [6 Punkte] Umlaufende Achse

Wir betrachten eine umlaufende Achse: zwei Räder mit Radius a sind über eine Achse der Länge b verbunden und können sich unabhängig voneinander drehen. Die ganze Konfiguration bewegt sich ohne zu verrutschen (raue Unterfläche) in der xy -Ebene. Zeigen Sie, dass die nicht-holonomen Zwangsbedingungen als

$$\begin{aligned} \cos(\theta)dx + \sin(\theta)dy &= 0 & \leftrightarrow & \quad \dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) = 0 \\ \sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy &= \frac{a}{2}(d\phi + d\phi') & \leftrightarrow & \quad \dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \cos(\theta) = \frac{a}{2}(\dot{\phi} + \dot{\phi}') \end{aligned}$$

und die holonomen Zwangsbedingungen als

$$\theta = C - \frac{a}{b}(\phi - \phi') \quad \leftrightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{a}{b}(\dot{\phi} - \dot{\phi}')$$

formuliert werden können. Hierbei bezeichnen ϕ und ϕ' die Rollwinkel der beiden Räder, θ den Winkel zwischen der x -Achse und der umlaufenden Achse, $\mathbf{r} = (x, y)$ die Position der Achsenmitte und C eine Konstante.

