Diese Aufgaben dienen zur Wiederholung bereits gelernten Stoffes aus dem vorherigen Semester.
Die Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig.

1. [*0 Punkte*] **Vektorrechnung**

$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ seien jeweils Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung.

(a) Geben seien die Vektoren $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3$.

i. Zerlegen Sie den Vektor $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp$ in einen Vektor $\mathbf{a}_\parallel$ parallel und einen Vektor $\mathbf{a}_\perp$ senkrecht zum Vektor $\mathbf{b}$. Überprüfen Sie ob $\mathbf{a}_\parallel \cdot \mathbf{a}_\perp = 0$ gilt.

ii. Berechnen Sie die Beträge von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Dreiecksungleichung: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq a + b$.

iii. Berechnen Sie die Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms und bestimmen Sie einen Einheitsvektor, der auf dieser Ebene senkrecht steht.

(b) Beweisen Sie: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

2. [*0 Punkte*] **Die Kreisbewegung: kartesische Koordinaten versus Polarkoordinaten.**

Das Beispiel der Kreisbewegung ist besonders wichtig, da es häufig in der Physik und Astronomie auftritt. Ein Teilchen bewege sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius R in der x-y-Ebene.

(a) Allgemein lautet der Ortsvektor eines Teilchens zum Zeitpunkt t in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_1 + y(t)\,\mathbf{e}_2$ mit den Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Im Speziellen gilt für die Kreisbewegung:

$$\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_1 + R\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_2\,.$$

i. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}$ und den Betrag der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}|$. Was folgern Sie aus dem Ergebnis von $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$?

ii. Berechnen Sie die Beschleunigung $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ und deren Betrag $|\mathbf{a}|$.

(b) Je nach Symmetrie des Problems können auch andere Koordinatensysteme benutzt werden. Hier bietet sich das Polarkoordinatensystem an. Deren Transformationsgleichung lautet

$$\mathbf{r} = r\cos(\varphi)\,\mathbf{e}_1 + r\sin(\varphi)\,\mathbf{e}_2\,,$$

wobei $r \geq 0$ den Abstand des Punktes zum Ursprung und $0 \leq \varphi < 2\pi$ den Winkel zwischen der x-Achse und dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ bezeichnet. Die Basisvektoren des Polarkoordinatensystems sind:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right|} = \dots$$

Der Ortsvektor eines Teilchens zum Zeitpunkt t in Polarkoordinaten lautet $\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t)$.

i. Berechnen Sie den Basisvektor $\mathbf{e}_\varphi$. Sind $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$ orthogonal zueinander?

ii. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ in Polarkoordinaten unter Verwendung der Kettenregel.
Hinweis: Beachten Sie, dass wegen $r(t)$ und $\varphi(t)$ die Basisvektoren $\mathbf{e}_r(t)$ und $\mathbf{e}_\varphi(t)$ nun auch zeitabhängig sind. Zum Beispiel gilt $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_r$.

iii. Betrachten Sie nun eine Kreisbewegung, d.h. setzen Sie einen konstanten Radius $r = R$ und eine konstante Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$ an. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a).

Dr. Adam Wysocki, E2 6, Zi.4.26
a.wysocki@lusi.uni-sb.de

3. [*0 Punkte*] **Zylinderkoordinaten**

(a) Zeigen Sie, dass die Basisvektoren das Zylinderkoordinatensystem orthonormal zueinander sind.

i. Erweitern Sie die oben eingeführten Polarkoordinaten um eine Höhenkoordinate z und schreiben Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}$ als Funktion der Koordinaten (r, φ, z).

ii. Berechnen Sie die Tangenteneinheitsvektoren:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right|} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_z = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|}$$

iii. Zeigen Sie, dass diese Vektoren eine Orthonormalbasis bilden, d.h.

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu},$$

wobei

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für } \mu = \nu \end{cases}$$

und *Kronecker-Symbol* heißt.

iv. Mit Hilfe des Spatprodukts $\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z)$ kann man feststellen ob die Basisvektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden.

(b) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{A} = z\mathbf{e}_1 + 2x\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_3$ in Zylinderkoordinaten dar.
Hinweis: Der Ansatz für die Lösung ist: $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi + A_z\mathbf{e}_z$. Es müssen die Einheitsvektoren des kartesischen Systems durch die des Zylindersystems ersetzt werden und die Komponenten z, $2x$ und y durch Zylinderkoordinaten ausgedrückt werden.

4. [*0 Punkte*] **Kugelkoordinaten**

Die kartesischen Koordinaten lassen sich wie folgt durch die Kugelkoordinaten ausdrücken:

$$\mathbf{r} = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\,\mathbf{e}_1 + r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\,\mathbf{e}_2 + r\cos(\vartheta)\,\mathbf{e}_3\,,$$

mit dem Radius $r \geq 0$, dem Polarwinkel $0 \leq \vartheta < \pi$ und dem Azimutwinkel $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(a) Konstruieren Sie das lokale Dreibein $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$ und $\mathbf{e}_\varphi$ in Analogie zur Aufgabe 3 (a) ii. Zeigen Sie explizit, dass $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}$ und berechnen Sie $\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi)$.

(b) In Kugelkoordinaten lautet die Bahnkurve eines Massenpunkts $\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t)$. Zeigen Sie, dass der entsprechende Geschwindigkeitsvektor die Form

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + r\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\mathbf{e}_\varphi$$

hat.

(c) Ein Satellit fliege auf einer spiralförmigen Bahn von einem Punkt über dem Nordpol zu einem Punkt über dem Südpol. In Kugelkoordinaten ist die Bahn beschrieben durch $r(t) = R$, $\vartheta(t) = \pi t$ und $\varphi(t) = \omega t$ mit $t \in [0, 1]$.

i. Machen Sie eine qualitative Skizze der Bahn für $\omega = 2\pi$ und $\omega = 3\pi$.

ii. Wie lautet die Kurvengeschwindigkeit $\mathbf{v}$ in Kugelkoordinaten?

Dr. Adam Wysocki, E2 6, Zi.4.26
a.wysocki@lusi.uni-sb.de