Diese Aufgaben dienen zur Wiederholung bereits gelernten Stoffes aus dem vorherigen Semester.
Die Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig.

1. [*0 Punkte*] **Kurvenintegrale**

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (3x^2 + 6y)\,\mathbf{e}_1 - 14yz\,\mathbf{e}_2 + 20xz^2\,\mathbf{e}_3$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$I_i = \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

entlang der folgenden drei Wege C_1, C_2 und C_3 zwischen dem Punkt $(0,0,0)$ und dem Punkt $(1,1,1)$:

i. Der Weg C_1 ist eine Gerade von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$.

ii. Der Weg C_2 besteht aus drei geradlinigen Teilwegen: von $(0,0,0)$ nach $(1,0,0)$, von $(1,0,0)$ nach $(1,1,0)$ und von $(1,1,0)$ nach $(1,1,1)$.

iii. Der Weg C_3 ist eine parametrisierte Kurve $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ mit $t \in [0,1]$.

(b) Berechnen Sie die Arbeit, die ein Teilchen verrichtet, welches sich auf einer Kreisbahn mit Radius $R = 1$ in der x-y-Ebene ($z = 0$) im Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x - y + z)\,\mathbf{e}_1 + (x + y - z^2)\,\mathbf{e}_2 + (3x - 2y + 4z)\,\mathbf{e}_3$$

bewegt. Die Bahn soll im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden. Was passiert wenn die Bahn im Uhrzeigersinn durchlaufen wird?

Hinweis: Die Arbeit entlang einer beliebigen Kurve C innerhalb des Kraftfelds $\mathbf{F}$ lautet

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Die Parameterdarstellung der Kreisbahn mit Radius $R = 1$, die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, lautet: $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{e}_1 + \sin(t)\,\mathbf{e}_2$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

2. [*0 Punkte*] **Oberflächenintegrale**

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 4xz\,\mathbf{e}_1 - y^2\,\mathbf{e}_2 + yz\,\mathbf{e}_3$. Berechen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\,\mathrm{d}S\,,$$

über die Oberfläche S eines Einheitswürfels $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\big\}$, wobei $\mathbf{n}$ den Einheitsnormalenvektor der Fläche S bezeichnet.

i. Skizzieren Sie den Würfel.

ii. Identifizieren Sie die Einheitsnormalenvektoren $\mathbf{n}$ der sechs Flächen des Würfels.

iii. Berechnen Sie $\mathbf{A}$ und daraus $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ auf den sechs Flächen.

iv. Führen Sie die Integration auf den Teilflächen aus und summieren Sie die Teilergebnisse.

(b) Berechen Sie den Fluss $\int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\,\mathrm{d}S$ des Vektorfelds $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = z^2\,\mathbf{e}_1 + 2zy\,\mathbf{e}_2 + x^2\,\mathbf{e}_3$ durch den Zylindermantel $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, 0 \le z \le 2\big\}$ (Zylinderoberfläche ohne Deckel und Boden).

i. Skizzieren Sie den Zylindermantel.

ii. Parametrisieren Sie den Zylindermantel, $\mathbf{r}(\varphi, z)$, und drücken Sie das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}(\varphi, z))$ in dieser Parametrisierung aus.

iii. Berechnen Sie den normierten Flächennormalenvektor

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right) \Bigg/ \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|$$

und das Flächenelement $\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right| \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$.

Dr. Adam Wysocki, E2 6, Zi.4.26
a.wysocki@lusi.uni-sb.de

3. [*0 Punkte*] **Mehrdimensionale Integrale**

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ und die Fläche $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq x\}$. Skizzieren Sie die Fläche S und berechnen Sie das Integral

$$\iint_S f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

(b) Berechnen Sie die Masse

$$M = \iint_T \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

einer halbkreisförmigen Tischplatte $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}$ mit Radius R und homogener Massendichte $\rho(x,y) = 1$ unter Verwendung von ebenen Polarkoordinaten und bestimmten Sie den Schwerpunkt $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$ der obigen Tischplatte, wobei

$$s_x = \frac{1}{M}\iint_T x\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad s_y = \frac{1}{M}\iint_T y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Hinweis: Die Transformationsformel zwischen ebenen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten lautet

$$x(r,\varphi) = r\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$$

mit Radius $r \geq 0$ und Winkel $0 \leq \varphi < 2\pi$. Mit Hilfe der Funktionaldeterminante (der Determinante der Jacobi-Matrix J)

$$\det J = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r\,.$$

ergibt sich das Flächenelement zu:

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |\det J|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,.$$

(c) Die barometrische Höhenformel, $\rho(z) = \rho_0\exp(-\alpha z)$, beschreibt die vertikale Verteilung der Gasteilchen in der Atmosphäre. Berechnen Sie die Masse M der Luftsäule V mit kreisförmiger Grundfläche πR^2 und Höhe h via

$$M = \iiint_V \rho(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten und berechnen Sie analog zu Teil (b) das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ mit Hilfe der entprechenden Funktionaldeterminante.

(d) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_V 16z\,\mathrm{d}V = \iiint_V 16z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

wobei $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$ die obere Halbkugel bezeichnet.
Hinweis: Die Transformationsformel zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten lautet:

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\vartheta) \end{aligned}$$

mit dem Radius $r \geq 0$, dem Polarwinkel $0 \leq \vartheta < \pi$ und dem Azimutwinkel $0 \leq \varphi < 2\pi$. Berechnen Sie die zugehörige Funktionaldeterminante $\det J = \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}$ und daraus das Volumenelement $\mathrm{d}V$.

Dr. Adam Wysocki, E2 6, Zi.4.26
a.wysocki@lusi.uni-sb.de