Diese Aufgaben dienen zur Wiederholung bereits gelernten Stoffes aus dem vorherigen Semester.
Die Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig.

**1.** [*0 Punkte*] **Vektoranalysis**

(a) Gegeben sei das skalare Feld $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$.

i. Bestimmen Sie den Gradienten von $\varphi$, also $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y})$.

ii. Skizzieren Sie $\varphi$ indem Sie Isolinien von $\varphi$, also $\varphi(x, y) = \text{const}$, einzeichen. Wie sieht das Feldbild des Gradientenfelds $\operatorname{grad}\varphi$ aus?

(b) Gegeben seien folgende Vektorfelder $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{r} = \alpha(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \quad \text{mit} \quad \alpha < 0$$

und

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{r}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \omega < 0\,,$$

wobei $r$ den Betrag von $\mathbf{r}$ bezeichnet.

i. Skizzieren Sie das Feldbild von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in der $x$-$y$-Ebene (also für $z = 0$).

ii. Berechnen Sie das *Quellenfeld*

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

sowie das *Wirbelfeld*

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\,.$$

(c) Zeigen Sie: $\nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = 0$

**2.** [*0 Punkte*] **Satz von Stokes**

Sei $S^+ = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^3 = 1,\ z \geq 0\}$ die obere und $S^- = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^3 = 1,\ z \leq 0\}$ die untere Hälfte der Oberfläche einer Einheitskugel mit der $z$-Achse als Symmetrieachse. Der Normalenvektor $\mathbf{n}$ der Fläche zeigt vom Ursprung weg. Gegeben sei weiterhin ein Vektorfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (y, 2x, 0)\,.$$

(a) Skizzieren Sie $\mathbf{B}$. Vom bloßen Augenschein: hat es Wirbel oder nicht?

(b) Skizzieren Sie $S^+$ und $S^-$ und erklären Sie wo sich der Rand $\partial S^+$ und $\partial S^-$ befindet.

(c) Berechnen Sie das Flächenintegral von $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ über $S^+$ als

$$\int_{S^+} (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{B})\ \mathrm{d}S$$

und das Wegintegral des Vektorfelds entlang des positiv orientierten Randes $S^+$ als

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

(d) Was ergibt das Flächenintegral von $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ über $S^-$?

(e) Berechnen Sie das Flächenintegral von $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ über $S = S^+ \cup S^-$. Inwiefern ist das Ergebnis konsistent mit Teilaufgaben (c) und (d).


Dr. Adam Wysocki, E2 6, Zi.4.26
a.wysocki@lusi.uni-sb.de

**3.** [*0 Punkte*] **Gaußscher Integralsatz**

Sei $V = \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^3 \leq R\right\}$ die abgeschlossene Kugel mit Radius $R$ und $S = \partial V = \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^3 = R\right\}$ deren Rand. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,.$$

(a) Skizzieren Sie $\mathbf{A}$. Vom bloßen Augenschein: hat es Quellen oder nicht?

(b) Berechnen Sie $\operatorname{div}\mathbf{A}$ und das Volumenintegral von $\operatorname{div}\mathbf{A}$ über eine Kugel mit Radius $R$ als

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,\mathrm{d}V\,.$$

(c) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius $R$ als

$$\int_S (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S\,,$$

wobei $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ das äußere Normaleneinheitsvektorfeld des Rands $S$ bezeichnet.

(d) Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse aus (b) und (c).

**4.** [*0 Punkte*] **Lineare Algebra**

(a) Bilden Sie aus den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Produktmatrizen $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

(b) Berechnen Sie die Determinate der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 99 & 18 & 63 \\ 11 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Falls $B$ sich aus $A$ ergibt, indem man das $c$-Fache einer Zeile oder Spalte bildet, dann ist $\det(B) = c \cdot \det(A)$.

(c) Mit Hilfe von Determinanten kann man beispielsweise feststellen, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar oder eine quadratische Matrix invertierbar ist.

i. Untersuchen Sie das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

auf Lösbarkeit und geben Sie, falls möglich, die Lösung an.

ii. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, d.h., dass $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = 0$ nur für $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ erfüllbar ist.

(d) Das Eigenwertproblem $A \cdot \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ist allgegenwärtig in der Physik, zum Besipiel ist der Trägheitstensor eines Körpers diagonal in einem von den Eigenvektoren des Trägheitstensors aufgespannten Koordinatensystem. Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda$ und die Eigenvektoren $\mathbf{v}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I) = 0$, wobei $I$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Für einen Eigenwert $\lambda$ lassen sich die Eigenvektoren aus der Gleichung $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = 0$ bestimmen.


Dr. Adam Wysocki, E2 6, Zi.4.26
a.wysocki@lusi.uni-sb.de