10. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: *freiwillig*)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

E1. Eigenwertproblem

(a) Sei $\hat{A}$ ein beliebiger hermitescher Operator. Nennen Sie je eine charakteristische Eigenschaft (i) der Eigenwerte, (ii) der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

(b) $|a\rangle$ sei ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum Eigenwert a. Ist $|a\rangle$ auch ein Eigenvektor der Operatorfunktion $f(\hat{A})$? Wenn ja, was ist der entsprechende Eigenwert?

E2. Rechnen mit Operatoren

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ beliebige lineare Operatoren. Unter welcher Bedingung ist die Relation $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}}$ gültig?

E3. Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Observable $\hat{A}$ im reinen Zustand $|\psi\rangle$ kann mit den folgenden Formeln berechnet werden:

(1) $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$, wobei $\hat{\rho}$ der Dichteoperator ist;

(2) $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$;

(3) $\sum_a a \cdot w(a|\psi)$, wobei a ein Eigenwert von $\hat{A}$ und $w(a|\psi)$ die Wahrscheinlichkeit ist, a als Meßergebnis im Zustand $|\psi\rangle$ zu erhalten.

Zeigen Sie, dass diese Formeln äquivalent sind. Die erste Formel gilt als die allgemeinste. Vergewissern Sie, dass sie auch für eine gemischte Gesamtheit gültig ist.

E4. Dirac-Notation

Formulieren Sie die folgenden Gleichungen ohne Verwendung der Dirac-Schreibweise (also mit Wellenfunktionen $\psi(x)$, $\psi(p)$ etc) um:

$$\langle x|\psi\rangle = \int dp\, \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle \quad \text{und} \quad \langle p|\psi\rangle = \int dx\, \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle\,.$$

Erläutern Sie diese Gleichungen.

E5. Ein spinloses Teilchen im 1D Potentialtopf

Wir betrachten ein spinloses Teilchen in einem eindimensionalen Potentialtopf.

(a) Das Potential $V(x)$ sei eine gerade Funktion von $\hat{x}$, d.h. $V(x) = V(-x)$. Welche Symmetrie folgt daraus für die Energieeigenfunktionen des diskreten Energiespektrums?

(b) Gibt es diskrete Energieeigenwerte, die entartet sind?

E6. Impulserwartungswert

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Impulses für eine beliebige *reelle* Wellenfunktion Null ist.

E7. Umeichen des Potentials

(a) Sei $\psi(x,t)$ die Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung zum Potential $V(x)$. Wie ändert sich die Wellenfunktion $\psi(x,t)$, wenn man das Potential gemäß $V(x) \to V(x) + c$ mit $c = \text{const.}$ umeichen?

(b) Wie ändert sich die Wellenfunktion $\psi(x,t)$, wenn c in (a) räumlich konstant aber zeitabhängig ist?

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 — zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 — lin@lusi.uni-sb.de

E8. Harmonischer Oszillator in 2D

Geben Sie für einen isotropen zweidimensionalen Oszillator die Entartungen der drei niedrigsten Energieeigenwerte und die Parität der zugehörigen Eigenzustände an.

E9. Ideale Messungen im Stern-Gerlach Versuch

Ein Strahl von Spin-1/2-Teilchen bewegt sich durch drei hintereinander geschaltete Stern-Gerlach-Apparaturen SG_1, SG_2 und SG_3, und die folgenden Messungen werden durchgeführt:

- Bei der ersten Messung mit SG_1 werden Teilchen mit $s_z = \hbar/2$ herausgefiltert.
- Die zweite Messung in SG_2 filtert die Teilchen mit $s_x = -\hbar/2$ heraus.
- Die dritte Messung in SG_3 filtert die Teilchen mit $s_z = -\hbar/2$ heraus.

Wie groß ist die Intensität N' (Teilchen pro Zeiteinheit) des Strahls nach der letzten Messung, wenn die Intensität des Strahls nach Verlassen des SG_1-Apparats N ist. Wie groß ist die Intensität N', wenn man die Reihenfolge von SG_2 und SG_3 vertauscht? Was passiert, wenn der SG_2-Apparat nicht existiert?

E10. Erhaltungsgrößen

Welche Erhaltungsgrößen folgen aus der Invarianz (a) der räumlichen Translation (b) der zeitlichen Translation und (c) der Rotation?

E11. Kommutatoren

$\hat{T}_{\boldsymbol{d}}$: der räumliche Translationsoperator um eine Verschiebung $\boldsymbol{d}$
$\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\phi)$: der Rotationsoperator um die Achse $\boldsymbol{n}$ und um einen Winkel ϕ
$\hat{\Pi}$: der Paritätsoperator
Entscheiden Sie, ob die folgenden Kommutatoren verschwinden.

(a) $[\hat{T}_{\boldsymbol{d}}, \hat{T}_{\boldsymbol{d}'}]$ ($\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{d}'$ sind in verschiedenen Richtungen).

(b) $[\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\phi), \hat{D}_{\boldsymbol{n}'}(\phi')]$ ($\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{n}'$ sind in verschiedenen Richtungen).

(c) $[\hat{T}_{\boldsymbol{d}}, \hat{\Pi}]$

(d) $[\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\phi), \hat{\Pi}]$

E12. Auswahlregel

(a) $|m\rangle$ und $|n\rangle$ seien Eigenvektoren des Paritätsoperators. Begründen Sie warum für den Ortsoperator $\hat{\boldsymbol{x}}$ gilt $\langle m|\hat{\boldsymbol{x}}|n\rangle = 0$, wenn die Zustände $|m\rangle$ und $|n\rangle$ gleiche Parität besitzen.

(b) $|l, m\rangle$ sei das gemeinsame System von Eigenvektoren von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ ($\hat{\boldsymbol{L}}$: Bahndrehimpulsoperator). Unter welcher Bedingungen verschwinden die Matrixelemente $\langle l', m'|z|l, m\rangle$ nicht?

E13. Vektoroperator

(a) Sei $\hat{\boldsymbol{A}}$ ein Vektoroperator. Ist auch $-\hat{\boldsymbol{A}}$ ein Vektoroperator?

(b) Zeigen Sie: Für einen Vektoroperator $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ gilt: $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\boldsymbol{A}}] = 2i\hbar(\hat{\boldsymbol{A}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - i\hbar\hat{\boldsymbol{A}})$.

E14. Zusammensetzung von Drehimpulsen

Wir betrachten die Addition zweier Drehimpulse $\boldsymbol{J}_1$ und $\boldsymbol{J}_2$. Was sind Clebsch-Gordan-Koeffizienten? Geben Sie die Bedingungen für die magnetische Quantenzahl m und die Quantenzahl j des Gesamtdrehimpulses $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$, so dass die Clebsch-Gordan-Koeffizienten nicht verschwinden.

E15. Zusammengesetztes Spinsystem

Zwei Spin 1/2-Teilchen befinden sich in einem Singulett-Zustand. Berechnen Sie den Erwartungswert des Produktoperators $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \boldsymbol{n}) \otimes (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \boldsymbol{n})$ in diesem Zustand, wobei $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i$ der Pauli-Spinoperator für das Teilchen i und $\boldsymbol{n}$ ein Einheitsvektor ist.

Ein frohes Weihnachtsfest und ein erfolgreiches Jahr 2009!

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 — zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 — lin@lusi.uni-sb.de