11. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *13.Jan.2009, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

32. [*10 Punkte*] **Zylindersymmetrisches Problem**

Gegeben sei ein zylindersymmetrisches Potential $V(\hat{\boldsymbol{x}}) = V(\hat{\rho})$ mit $\hat{\rho} = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}$.

3 (a) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(\hat{\rho})$ sowohl mit der z-Komponente des Bahndrehimpulsoperators $\hat{L}_z$ als auch mit der z-Komponente des Impulsoperators $\hat{p}_z$ vertauscht.

3 (b) Zeigen Sie, dass sich der Hamilton-Operator in der Form

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\rho^2}{2M} + \frac{\hat{p}_z^2}{2M} + \frac{\hat{L}_z^2}{2M\rho^2} + V(\rho)$$

mit

$$\hat{p}_\rho^2 = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$$

schreiben lässt. Beachten Sie dabei, dass $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$ in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) ist.

4 (c) Wählen Sie für die gemeinsamen Eigenfunktion von $\hat{H}$, $\hat{L}_z$ und $\hat{p}_z$ den Ansatz

$$\psi(\rho, \phi, z) = R(\rho) f(\phi) g(z)$$

wobei $f(\phi)$ Eigenfunktion von $\hat{L}_z$ und $g(z)$ Eigenfunktion von $\hat{p}_z$ ist. Zeigen Sie dann, dass R der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} + \left(\alpha - \frac{2MV(\rho)}{\hbar^2} - \frac{m}{\rho^2}\right) R = 0$$

mit $\alpha = 2ME/\hbar^2 - k_z^2$ genügt. Hier steht E für die Energieeigenwerte, $\hbar m$ für die Eigenwerte von $\hat{L}_z$ und $\hbar k_z$ für die Eigenwerte von p_z.

(d) *(Präsenzaufgabe)* Betrachten Sie nun ein freies Teilchen, das in einem unendlich langen Zylinder (Radius r_0) mit hartem Mantel (d.h. $V = \infty$ außerhalb des Zylinders) eingesperrt ist. Es soll ferner gelten $\hat{L}_z = \hat{p}_z = 0$. Welche Quantisierungsregel für α bzw. E ergibt sich aus dieser Randbedingung?

33. [*10 Punkte*] **Srörungsrechnung**

(a) Der Hamilton-Operator eines Zwei-Niveau-Systems sei in der Energiedarstellung gegeben durch die 2×2-Matrix

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varepsilon_1 > \varepsilon_2.$$

Wir betrachten zum Vergleich ein System mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{W} = \hat{H}_0 + \lambda \begin{pmatrix} V_1 & U \\ U^* & V_2 \end{pmatrix}.$$

3 i. Betrachten Sie $\lambda\hat{W}$ als kleine Störung ($0 < \lambda \ll 1$) und berechnen Sie die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ bis zur zweiten Ordnung mittels Störungstheorie.

3 ii. Berechnen Sie die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ exakt. Zeigen Sie, dass das exakte Resultat im Grenzfall $\lambda\,|W_{ij}| \ll |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ in das Ergebnis aus Aufgabe i. übergeht (W_{ij} steht für die Elemente in der Matrix $\hat{W}$).

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 lin@lusi.uni-sb.de

4 (b) Betrachtet wird ein Quantensystem, beschreiben durch den Hamilton-Operator $\hat{H}_0$. Der Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ besitzt zwei Eigenwerte ε_1 und ε_2, die jeweils zweifach entartet sind. Die Eigenvektoren zu ε_1 sind $\{|1_\alpha\rangle, |1_\beta\rangle\}$ und zu ε_2 sind $\{|2_\gamma\rangle, |2_\delta\rangle\}$. Eine Störung beeinflusst das System, was zu dem folgenden Hamilton-Operator (in der Energiedarstellung von $\hat{H}_0$) führt:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & a & d & 0 \\ a & \varepsilon_1 & b & 0 \\ d & b & \varepsilon_2 & c \\ 0 & 0 & c & \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ bis zur ersten Ordnung und die Eigenvektoren (bis zur nullten Ordnung) mit Hilfe der Störungstheorie.

34. [*15 Punkte*] **Zeeman-Effekt und Spin-Bahn-Kopplung**

Ein Elektron in einem p-Zustand ($\ell = 1$) des Wasserstoffatoms befinde sich in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung. Wir berücksichtigen den Hamilton-Operator des Systems, der den Spin-Bahn-Term $\hat{H}_{LS}$ und den Zeeman-Term $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ enthält:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{2W}{\hbar^2}\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}}_{\hat{H}_{\mathrm{LS}}} + \underbrace{\frac{\mu_B}{\hbar} B(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)}_{\hat{H}_{\mathrm{B}}},$$

wobei W eine Konstant und μ_B das Bohrsche Magneton ist.

5 (a) Berechnen Sie die exakten Energieeigenwerte von $\hat{H}$.

5 (b) Im Grenzfall des schwachen Magnetfelds $\mu_B B \ll W$ kann der Zeeman-Term als Störung gegenüber dem Spin-Bahn-Term betrachtet werden. Berechnen Sie im Rahmen der Störungstheorie erster Ordnung die Energieeigenwerte.

5 (c) Berechnen Sie störungstheoretisch die Energieeigenwerte in erster Ordnung in W für den Fall, dass das Magnetfeld stark gegenüber W ist, also $W \ll \mu_B B$.

Bemerkung: Sie können die aus der Vorlesung bekannten Clebsch-Gordan-Koeffizienten direkt benutzen.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25
zimboras@lusi.uni-sb.de mape@lusi.uni-sb.de lin@lusi.uni-sb.de