

(Abgabe: bis zum 20. Jan. 2009, 12:00 Uhr im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: Donnerstag, 19. Feb. 2009, 9:15 - 13:00 Uhr)

**35. [5 Punkte] Variationsverfahren**

- 5 (a) Benutzen Sie als Testfunktion für das attraktive Delta-Funktions Potentials  $V = -aV_0\delta(x)$  eine Gauss Funktion. Berechnen Sie die obere Schranke für die Grundzustandsenergie  $E_0$  und vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit der exakten Lösung.
- (b) (*Präsenzaufgabe*) Wir untersuchen den Einfluss eines äußeren, schwachen elektrischen Feldes auf den Grundzustand des Wasserstoffatoms, wobei die Spin-Freiheitsgrade nicht berücksichtigt werden. Die Störung durch das elektrische Feld in  $z$ -Richtung ist gegeben als  $H_1 = e\mathcal{E}z = e\mathcal{E}r \cos\theta$ . Wenden Sie das Variationsverfahren an, um die obere Schranke der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms im  $\mathcal{E}$ -Feld abzuschätzen, und verwenden Sie hierzu die Probefunktion

$$\psi_\lambda(\mathbf{x}) = N(1 + \lambda e\mathcal{E}z)\varphi_0(\mathbf{x}),$$

wobei  $\lambda$  der Variationsparameter,  $\varphi_0$  die Grundzustandswellenfunktion des ungestörten (feldfreien) Atoms und  $N$  die Normierungskonstante ist.

**36. [15 Punkte] Hyperfeinstruktur**

Betrachten Sie eine vereinfachte Form der Wechselwirkung zwischen Elektronenspin  $\hat{\mathbf{S}}_e$  und Protonenspin  $\hat{\mathbf{S}}_p$ , die im Wasserstoffatom das Auftreten der Hyperfeinstruktur verursacht:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} + \lambda(\hat{\mathbf{S}}_p \cdot \hat{\mathbf{S}}_e),$$

wobei  $\lambda$  ein Parameter ist. Vernachlässigen Sie alle anderen Störungen.

- (a) Nehmen Sie an, das Atom sei zu Beginn (zur Zeit  $t = 0$ ) im Grundzustand des vom Spin unabhängigen Teil des Hamiltonoperators, mit Protonenspin 'up' und Elektronenspin 'down', also im Zustand  $|n = 1, \ell = 0, m_\ell = 0\rangle \otimes |\uparrow_p\rangle \otimes |\downarrow_e\rangle$
- 4 i. Bestimmen Sie die Wellenfunktion zu späteren Zeitpunkten  $t > 0$ .
- 3 ii. Wie ist die Wahrscheinlichkeit den Protonenspin im Zustand 'down' zu finden ?
- 4 iii. Berechnen Sie den Erwartungswert des magnetischen Dipolmoments des Systems zu beliebigen Zeitpunkten.
- 4 (b) Der Operator des Gesamtdrehimpulses ist gegeben durch  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}_p + \hat{\mathbf{S}}_e$ . Was sind die erlaubten Werte der Quantenzahl  $j$ ? Betrachten Sie einen Zustand mit  $n = 5$ , gerader Parität und  $j = 3$ . Was ist der totale Spin eines solchen Zustands? Wie gross ist der Energieunterschied zwischen diesem Zustand und einem Zustand mit  $n = 2$ , ungerader Parität und  $j = 0$ ?

**37. [10 Punkte] Auswahlregeln**

Berechnen Sie die angegebenen Matrixelemente.

- 3 (a)  $\langle n = 2, \ell = 1, m_\ell = 0 | \hat{x} | n = 2, \ell = 0, m_\ell = 0 \rangle$ .
- 3 (b)  $\langle n = 2, \ell = 1, m_\ell = 0 | \hat{p}_z | n = 2, \ell = 0, m_\ell = 0 \rangle$ .  
(In (a) und (b), bezeichnet  $|nlm\rangle$  die Energieeigenzustände des Wasserstoffatoms bei Vernachlässigung des Spins.)
- 4 (c)  $\langle \hat{L}_z \rangle$  für ein Elektron im Zentralfeld mit  $j = \frac{9}{2}$ ,  $m = \frac{7}{2}$ ,  $\ell = 4$ .