14. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *03.Feb.2009, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

41. [*9 Punkte*] **Übergang eines Atoms/Auswahlregeln**

3 (a) Ein Wasserstoffatom im Grundzustand befindet sich in einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E} = (0, 0, E(t))$ mit

$$E(t) = E_0^{-t^2/\tau^2}\,.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Atom nach einer langen Zeit ($t \gg \tau$) im Zustand $2p$ zu finden.

4 (b) Die Amplitude für die Ausstrahlung elektrischer Dipolstrahlung beim Übergang zwischen zwei Zuständen mit den Drehimpulsquantenzahlen ℓ, m und ℓ', m' enthält die Matrixelemente $\langle \ell', m'|\hat{\boldsymbol{x}}|\ell, m\rangle$ ($\hat{\boldsymbol{x}}$: Ortsoperator). Elektrische Dipolübergänge sind nur dann möglich, wenn diese Matrixelemente endlich sind, d.h. wenn die Auswahlregeln erfüllt sind. Zeigen Sie die Auswahlregeln:

$$\ell' - \ell = \pm 1 \quad \text{und} \quad m' - m = 0, \pm 1\,.$$

2 (c) Bestimmen Sie die Auswahlregeln für die Matrixelemente $\langle n', \ell', m'|\hat{x}\,\hat{y}|n, \ell, m\rangle$, wobei $|n, \ell, m\rangle$ ein Energieeigenzusand des Wasserstoffatoms bei Vernachlässigung des Spins ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Doppelkommutator $\left[\boldsymbol{L}^2, [\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{x}]\right]$ (und andere Kommutatoren), oder den Zusammenhang zwischen x, y, z und den Kugelfunktionen.

42. [*10 Punkte*] **Goldene Regel/Übergänge im Kontinuum**

Zur Zeit $t \to -\infty$ befindet sich ein freies Teilchen im Impuls-Eigenzustand $|\boldsymbol{k}\rangle$ (zum Eigenwert $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$). Ein Potential wird langsam eingeschaltet und man setzt formal

$$\widetilde{V}(\boldsymbol{x}, t) = V(\boldsymbol{x})\, e^{\eta t},$$

wobei $V(\boldsymbol{x})$ zeitlich konstant und $\eta > 0$ infinitesimal ist.

5 (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Störungstheorie erster Ordnung, dass für $\eta \to 0$ die Übergangsrate (die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit) von $|\boldsymbol{k}\rangle$ in einen anderen Impuls-Eigenzustand $|\boldsymbol{k}'\rangle$ der Goldenen Regel von Fermi entspricht:

$$\Gamma_{\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}'} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle \boldsymbol{k}'|V|\boldsymbol{k}\rangle|^2 \delta(E_k - E_{k'}),$$

hier $E_k = \hbar^2 k^2/2m$ und $E_{k'} = \hbar^2 k'^2/2m$.

Hinweis: Die Diracsche δ-Funktion kann durch $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ dargestellt werden.

5 (b) Angenommen, dass das Teilchen in einem Kubus mit der Kantenlänge L und *periodischen Randbedingungen* eigenschlossen ist (Box-Normierung). Die Länge L sei viel größer als die Reichweite des Störpotentials. Zeigen Sie, dass die Übergangsrate in den Zustand $|\boldsymbol{k}'\rangle$ (mit $|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|$) in einem Raumwinkelelement der Größe $d\Omega$ gegeben ist durch

$$d\Gamma_{\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}'\in d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle \boldsymbol{k}'|V|\boldsymbol{k}\rangle|^2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{m|\boldsymbol{k}|}{\hbar^2} d\Omega\,.$$

Bemerkung: Die Box-Normierung ist eine Alternative zur δ-Funktion-Normierung für ebene Wellen. Periodischen Randbedingungen, d.h. $\langle x + L|k_x\rangle = \langle x|k_x\rangle$, $\langle y + L|k_x\rangle = \langle y|k_y\rangle$, und $\langle z + L|k_z\rangle = \langle z|k_z\rangle$, führen zu diskreten Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$. Dasselbe bewirkt die Randbedingung, dass an den Wänden der Box die Wellenfunktionen verschwinden müssen.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 lin@lusi.uni-sb.de

43. [*9 Punkte*] **Streuung**

Berechnen Sie in erster Bornscher Näherung die Streuamplitude und den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ für die Streuung von Teilchen der Masse m

$\boxed{5}$ (a) an einem abgeschirmten Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{V_0\, e^{-ar}}{ar}$$

mit $V_0(=\text{const.}) > 0$ und $a(=\text{const.}) > 0$.

$\boxed{4}$ (b) an einem dreidimensionalen Potentialtopf

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 = \text{const.} & \text{für } r < R, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$.

44. [*7 Punkte*] **Wahrscheinlichkeitsstromdichte (Wiederholung)**

(a) *(Präsenzaufgabe)* Leiten Sie eine Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ aus der Schrödinger-Gleichung her.

$\boxed{3}$ (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$ für ein Teilchen, dessen Wellenfunktion sich in der Gestalt

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{x}, t)}\, e^{iS(\boldsymbol{x},t)/\hbar}$$

mit einer reellen Phasenfunktion $S(\boldsymbol{x}, t)$ schreiben lässt.

$\boxed{4}$ (c) Berechnen Sie $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$ in dem Spezialfall, wenn $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ ein Gauss-Paket ist:

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \left[\pi^{1/2}(\Delta + \alpha)\right]^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_0 t/m)^2}{2\Delta^2(1 + \alpha/\Delta)}\right] \exp\left[\frac{i\boldsymbol{p}_0}{\hbar} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{p}_0 t}{2m}\right)\right]$$

mit $\Delta \in \mathbb{R}$ und $\alpha = \frac{i\hbar t}{m\Delta}$.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 — `zimboras@lusi.uni-sb.de`
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — `mape@lusi.uni-sb.de`
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 — `lin@lusi.uni-sb.de`