15. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *10.Feb.2009, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr, Gebäude C6.3, großer Hörsaal*)

45. [*5 Punkte*] **Resonanz-Streuung am δ-Schalen-Potential**

Ein spinloses Teilchen der Masse m, Energie $E = \hbar^2 k^2/2m$ wird an folgendem abstoßenden δ-Potential gestreut:

$$\frac{2m}{\hbar^2} V(r) = \gamma \delta(r - R), \quad (\gamma > 0).$$

$\boxed{3}$ (a) Stellen Sie eine Gleichung auf, welche den Phasenshift δ_0 der s-Welle als eine Funktion von k bestimmt.

$\boxed{2}$ (b) Zeigen Sie, dass für sehr kleine $\tan(kR)$ Resonanz möglich ist! Bestimmen Sie approximativ die Resonanzenergien E_r bis zur Ordnung $1/\gamma$. Leiten Sie weiter eine approximative Formel für die folgendermaßen definierte Resonanzbreite her:

$$\Gamma := \frac{-2}{[d(\cos \delta_0)/dE]|_{E=E_r}} .$$

46. [*Bonus Punkte*] **Kurzfragen**

$\boxed{+1}$ (a) Ein Ensemble von Qubits werde in einem reinen Zustand $a\,|+\rangle + b\,|-\rangle$ (mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$) präpariert, wobei $|+\rangle$ ($|-\rangle$) der Eigenzustand eines hermiteschen Operators $\hat{\sigma}_z$ zum Eigenwert $+1\,(-1)$ ist. Geben Sie den Dichteoperator an, der die Zustände des Qubits-Ensembles nach einer Messung von $\hat{\sigma}_z$ beschreibt.

$\boxed{+1}$ (b) Wie groß ist die Unschärfe Δ_A im Eigenzustand der Observable $\hat{A}$?

$\boxed{+1}$ (c) Der Operator $\hat{U} = \hat{I} - i\varepsilon \hat{F}$ sei unitär. Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{F}$ hermitesch ist. Nehmen Sie dabei an, dass ε eine infinitesimal kleine Zahl ist. Was ist $\hat{F}$ für den Fall, wenn $\hat{U}$ der Zeitentwicklungsoperator, der Translationsoperator und der Rotationsoperator ist.

$\boxed{+1}$ (d) Leiten Sie aus der Eigenschaft des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t_2, t_0) = \hat{U}(t_2, t_1)\hat{U}(t_1, t_0)$ (mit $t_2 > t_1 > t_0$) die Differentialgleichung (die Schrödinger-Gleichung) für $\hat{U}$ her.

$\boxed{+1}$ (e) Wie sieht die Lösung für den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$ aus, wenn der Hamilton-Operator $\hat{H}$ des Systems
  i. zeitlich konstant ist;
  ii. explizit zeitabhängig ist. Vereinfachen Sie die Lösung für den Fall, wenn die Hamilton-Operatoren zu verschiedenen Zeiten kommutieren.

$\boxed{+1}$ (f) Betrachten Sie ein Punktteilchen der Masse m, welches sich in einem konstanten Kraftfeld f ($\in \mathbb{R}$) befindet. Formulieren Sie die Schrödinger-Gleichung in der Impulsdarstellung.

$\boxed{+1}$ (g) Berechnen Sie den Ortserwartungswert zur Zeit $t > 0$ für ein Teilchen im 1D harmonischen Potential, wenn das Teilchen sich bei $t = 0$ in einem Energieeigenzustand $|n\rangle$ befindet.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 — zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 — lin@lusi.uni-sb.de

$\boxed{+1}$ (h) Betrachten Sie eine Punktladung q in einem elektromagnetischen Feld

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\Phi,$$

beschrieben durch ein Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ und ein skalares Potential Φ. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Ortsoperators eichinvariant ist.

$\boxed{+1}$ (i) Wir betrachten die Zusammensetzung zweier Zweizustandsysteme. Der Operator $\hat{A}$ auf dem Zustandsraum des ersten Systems besitzt die Matrixdarstellung $(A)_{mn} = a_{mn}$ in der Basis $\{|\alpha_+\rangle, |\alpha_-\rangle\}$; der Operator $\hat{B}$ auf dem Zustandsraum des zweiten Systems hat die Matrixelemente $(B)_{mn} = b_{mn}$ in der Basis $\{|\beta_+\rangle, |\beta_-\rangle\}$. Schreiben Sie explizit die Matrixdarstellungen von $\hat{A}$, $\hat{B}$ und des Produktoperators $\hat{A} \otimes \hat{B}$ in der Produktbasis $\{|\alpha_m\rangle \otimes |\beta_n\rangle\}$ auf. Geben Sie dabei die Reihenfolge der Basisvektoren für die Darstellung an.

$\boxed{+1}$ (j) Ein Punktteilchen der Masse m befindet sich in einem kugelsymmetrischen Potential (Zentralpotential) $V(r)$ (mit $r = |\boldsymbol{x}|$). Leiten Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung (Energieeigenwertgleichung) für den Radialteil her.

$\boxed{+1}$ (k) Spin 1 und Spin 3/2 werden kombiniert. Wie groß ist die Basis?

$\boxed{+2}$ (l) Ein Quantensystem wird durch den zeitabängigen Hamilton-Operator $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}(t)$ beschrieben, wobei $0 < \lambda \ll 1$ und $\hat{H}_0$ zeitunabhängig ist. Geben Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$ in erster Ordnung von λ an.

$\boxed{+2}$ (m) Die Eigenfunktion $\psi(\boldsymbol{x})$ des Hamilton-Operators zum Streupotential $V(\boldsymbol{x})$ ist gegeben durch die Summe einer einlaufenden ebenen Welle und einer Streuwelle: $\psi(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + v(\boldsymbol{x})$. Geben Sie eine Differentialgleichung für $v(\boldsymbol{x})$ in erster Bornscher Näherung an.

$\boxed{+2}$ (n) In einem System zweier Teilchen befindet sich ein Teichen im Zustand $|a\rangle$ und das andere Teilchen im Zustand $|b\rangle$. Konstruieren Sie alle mögliche Zwei-Teilchen-Zustände für

i. zwei unterscheidbare Teilchen;
ii. zwei identische Fermionen;
iii. zwei identische Bosonen.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 — zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 — lin@lusi.uni-sb.de