3. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *11.Nov.2008, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

8. [*10 Punkte*] **Von-Neumann Messung im nicht entarteten Fall**

Ein Ensemble von Photonen wird in einem Experiment untersucht. Dabei befinden sich alle Photonen im gleichen Polarisationszustand $\frac{3}{5}|\leftrightarrow\rangle + \frac{4i}{5}|\updownarrow\rangle$. Für die Dichtematrix gilt daher:

$$\rho = \frac{9}{25}|\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| + \frac{12i}{25}|\updownarrow\rangle\langle\leftrightarrow| - \frac{12i}{25}|\leftrightarrow\rangle\langle\updownarrow| + \frac{16}{25}|\updownarrow\rangle\langle\updownarrow| \ .$$

Im Experiment wird die zu dem hermiteschen Operator

$$A = |\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| + 2i|\updownarrow\rangle\langle\leftrightarrow| - 2i|\leftrightarrow\rangle\langle\updownarrow| + |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow|$$

gehörige Observable gemessen.

2 (a) Was ist der Erwartungswert dieser Messung?

2 (b) Wie groß ist die Standardabweichung der Messung?

6 (c) Nehmen Sie an, dass eine Messung den Wert "3" ergibt. In welchem Polarisationszustand ist das so gemessene Photon?

9. [*10 Punkte*] **Von-Neumann Messung im entarteten Fall**

In einem Experiment wird ein Ensemble von Dreizustandssystemen untersucht. Dabei sei jedes System des Ensembles in dem gleichen Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Im Experiment wird die zu dem hermiteschen Operator

$$B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & -1\\0 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

gehörige Observable gemessen.

2 (a) Was ist der Erwartungswert dieser Messung?

2 (b) Wie groß ist die Standardabweichung der Messung?

6 (c) Nehmen Sie an, dass eine Messung den Wert "2" ergibt. In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung?

10. [*10 Punkte*] **Scharf Messen**

Gegeben seien folgende hermitesche Operatoren eines zweidimensionalen Hilbertraums:

$$C = \begin{pmatrix}7 & 2\\2 & 1\end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix}4 & 2i\\-2i & 3\end{pmatrix}.$$

5 (a) In welchen Zuständen verschwindet die Standardabweichung bei einer Messung mit C? Wie groß ist die Standardabweichung bei einer Messung mit D in diesen Zuständen?

5 (b) In welchem Zustand ist die Summe der Varianzen von C und D minimal?

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28, zimboras@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25, lin@lusi.uni-sb.de

11. [*10 Punkte*] **Neutrino Oszillationen**

Neutrino sind sehr leichte, evt. sogar masselosse Teilchen, die bei radioaktiven Zerfällen entstehen. Es gibt drei bekannte Arten: Elektron Neutrino ν_e, Myon Neutrino ν_μ und Tau Neutrino ν_τ. Sie sind nach den mit ihnen verbundenen Leptonen des Standardmodells benannt. Zur Vereinfachung werden wir die Tau Neutrino ignorieren und das $\nu_e - \nu_\mu$ System isoliert behandeln. Entsprechende experimentelle Realisierungen können in Teilchenbeschleunigern mittels π^- Mesonenzerfall erzeugt werden:

$$\pi^- \to \mu + \nu_\mu, \ \text{and } \pi^- \to e + \nu_e \tag{3.1}$$

In der Neutrinophysik werden zwei Basen verwendet:
(1) die schwache WW Eigenzustände ($|\nu_e\rangle$ und $|\nu_\mu\rangle$), produziert in schwachen Zerfallsprozessen;
(2) die Hamiltonian Eigenzustände ($|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$), gegeben durch

$$\hat{H}\,|\nu_1\rangle = E_1\,|\nu_1\rangle\,, \quad \hat{H}\,|\nu_2\rangle = E_2\,|\nu_2\rangle\,,$$

mit

$$E_i = \sqrt{p^2c^2 + m_i^2c^4} \approx pc + \frac{m_i^2c^4}{2pc}$$

für kleine Massen m_i, wobei c die Lichtgeschwindigkeit und p der Impuls ist. Wir nehmen an, dass $m_1 \neq m_2$, $m_1 > m_2$. Desweiteren läßt sich die Geschwindigkeit der Neutrino sehr gut durch die Lichtgeschwindigkeit c approximieren. Der Zustand der in Gleichung (3.1) produzierten Teilchen sei gegeben durch:

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle + \sin\theta\,|\nu_2\rangle\,, \ |\nu_\mu\rangle = -\sin\theta\,|\nu_1\rangle + \cos\theta\,|\nu_2\rangle\,, \tag{3.2}$$

θ sei dabei ein beliebiger Winkel.

(a) Zur Zeit $t = 0$ wird ein Neutrino mit Impuls p im Zustand $|\nu_\mu\rangle$ erzeugt.

$\boxed{2}$ i. Berechne den Zustand zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$.

$\boxed{5}$ ii. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit das Neutrino im Zustand $|\nu_e\rangle$ bei $t > 0$ zu detektieren? Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von θ, c, p, t und $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ an.

$\boxed{1}$ (b) Die Messung findet im Abstand ℓ vom Entstehungsort statt. Schreiben Sie die obige Wahrscheinlichkeit als Funktion von ℓ.

$\boxed{2}$ (c) Nehmen Sie den Zustand aus (3.2) für $\theta = \pi/4$ an. In welcher Entfernung ℓ ist die Zahl der detektierten ν_e maximal unter den Annahmen, dass $\Delta m^2c^4 = 1(eV)^2$ und $pc = 10GeV = 10^{10}eV$ ist? Geben Sie das Resultat in km an.

Bemerkung: In dieser Aufgabe wird die Oszillation von Neutrino, welche durch den Zerfall von π^- erzeugt werden, behandelt. Solche Oszillationen treten nur unter der Annahme nicht verschwindender Massen auf, eine Hypothese die experimentell noch bestätigt werden muß. Die zugrundeliegende Theorie basiert auf der Idee, dass die beiden Neutrino ν_e und ν_μ zwei verschiedene Zustände des selben physikalischen Gebildes sind, den wir "Neutrino" nennen.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28, zimboras@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25, lin@lusi.uni-sb.de