4. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *18.Nov.2008, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

12. [*15 Punkte*] **Zeitentwicklung des Gauss-Pakets**

Gegeben sei die Wellenfunktion eines freien Teilchens in einer Dimension mit zugehörigem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$ zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\psi(x', 0) = \frac{1}{(\pi\Delta^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(ix'\frac{p_0}{\hbar} - \frac{x'^2}{2\Delta^2}\right).$$

$\boxed{3}$ (a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte folgender Operatoren zum Zeitpunkt $t = 0$: $\hat{x}$, $\hat{p}$ und $\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$. Überprüfen Sie, dass die minimale Unschärferelation hier erfüllt ist.

$\boxed{4}$ (b) Bestimmen Sie den Propagator $G(x, t; x', t_0 = 0)$, der durch

$$\psi(x, t) = \int dx' G(x, t; x', 0)\psi(x', 0)$$

die Zeitentwicklung der Wellenfunktion beschreibt. Bestimmen Sie anschliessend die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ für $t > 0$.

$\boxed{4}$ (c) Bestimmen Sie die Impuls- und Ortsoperatoren, $\hat{p}_H(t)$ und $\hat{x}_H(t)$, im Heisenberg-Bild.

$\boxed{4}$ (d) Bestimmen Sie den Orts- und Impulserwartungswert, sowie die Unschärfe als Funktion der Zeit.

Hinweis:

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2 + \beta x} = e^{\beta^2/4\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2},$$

auch für komplexe α und β, sofern $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$.

13. [*20 Punkte*] **Kohärente und inkohärente Superposition**

Ein kohärenter Zustand ist dadurch charakterisiert, dass in Experimenten Interferenzeffekte der mit dem Zustand assoziierten Wellen beobachtet werden können. Für zwei beliebige positive Werte Δ_1 und Δ_2, mit $\Delta_1 \neq \Delta_2$, seien folgende zwei Wellenfunktionen gegeben:

$$|\psi_1\rangle := Z_1 \left(\frac{1}{(\pi\Delta_1^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta_1^2}\right) + \frac{1}{(\pi\Delta_2^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta_2^2}\right)\right)$$

$$|\psi_2\rangle := Z_2 \left(\frac{1}{(\pi\Delta_1^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta_1^2}\right) - \frac{1}{(\pi\Delta_2^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta_2^2}\right)\right)$$

$\boxed{2}$ (a) Normieren Sie die Wellenfunktionen durch Bestimmung der Konstanten Z_1 und Z_2.

$\boxed{2}$ (b) Zeigen Sie, dass $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ orthogonal zueinander sind.

$\boxed{6}$ (c) Eine kohärente Superposition dieser beiden Wellenfunktionen ist der durch folgende Wellenfunktion bestimmte reine Zustand:

$$\sqrt{a}|\psi_1\rangle + \sqrt{1-a}|\psi_2\rangle.$$

Eine inkohärente Superposition dagegen ist der gemischte Zustand, der durch folgende Dichtematrix mit $0 < a < 1$ beschrieben wird (welche insbesondere keine Mischterme $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ enthält):

$$a|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1-a)|\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte und Standardabweichungen des Orts- und des Impulsoperators.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28, zimboras@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25, lin@lusi.uni-sb.de

10 (d) Berechnen Sie mit Hilfe der vorherigen Aufgabe die Zeitentwicklung (im Schrödingerbild) in Abwesenheit eines Potentials für den kohärenten und den inkohärenten Fall. Berechnen Sie weiter, wie sich die Erwartungswerte und Standardabweichungen des Orts- und des Impulsoperators in der Zeit entwickeln.

14. [*10 Punkte*] **Kommutator-Identitäten**

Der Kommutator zweier linearer Operatoren X und Y ist definiert durch: $[X, Y] := XY - YX$.
A und B bezeichnen in dieser Aufgabe lineare Operatoren des selben endlichdimensionalen Hilbertraumes.

3 (a) Zeigen Sie, dass gilt: $[A, B] = \lambda I \Rightarrow \lambda = 0$.
I bezeichnet dabei die Identität.
Hinweis: Spur

3 (b) Die Ableitung eines Operators, der explizit von einem Parameter t abhängt, ist definiert als

$$\frac{dA(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{A(t+\epsilon) - A(t)}{\epsilon}$$

.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{dA(t)}{dt}B(t) + A(t)\frac{dB(t)}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}.$$

4 (c) Beweisen Sie:

$$e^{itA}Be^{-itA} = B + it[A, B] + \frac{(it)^2}{2!}[A, [A, B]] + \cdots + \frac{(it)^n}{n!}[A, [A, \ldots [A, [A, B] \ldots] + \cdots \quad .$$

Hinweis: Führen Sie eine Taylorentwicklung durch und nutzen Sie obige Formel!

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28, zimboras@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25, lin@lusi.uni-sb.de