5. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *25.Nov.2008, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

15. [*10 Punkte*] **Eindimensionaler harmonischer Oszillator**

Der Hamiltonoperator des quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2. \tag{5.1}$$

Dabei handelt es sich um ein sehr bedeutendes Modelsystem. Es wird häufig genutzt um analytische Potential in der Umgebung ihrer Minima zu approximieren (vorausgesetzt die zweite Ableitung verschwindet dort nicht). In der Vorlesung wurden folgende Leiteroperatoren definiert:

$$\hat{a} := \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\ ,\ \hat{a}^\dagger := \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,.$$

Der Hamiltonoperator kann in sehr einfacher Form durch die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ ausgedrückt werden: $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. Die Eigenwerte des Hamiltonian sind $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, mit $n \in \mathbb{N}_0$.

3 (a) Was sind die Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators im Energieeigenzustand $|n\rangle$ mit Eigenwert E_n?

7 (b) Berechnen Sie die Standardabweichungen von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ im Energieeigenzustand $|n\rangle$. Verifizieren Sie mit diesen Werten die Unschärferelation.

16. [*20 Punkte*] **Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators**

Betrachtet wird ein Teilchen der Masse m im harmonischen Potential, beschrieben durch den Hamiltonoperator (5.1). Die Eigenzustände des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ werden auch als kohärente Zustände bezeichnet:

$$\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,, \tag{5.2}$$

mit $z \in \mathbb{C}$.

4 (a) Zeigen Sie, dass

$$|z'\rangle = N e^{z'\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

ein Eigenzustand von $\hat{a}$ mit Eigenwert $z' \in \mathbb{C}$ ist, wobei $|0\rangle$ der Energiegrundzustand ist.
Hinweis: Nutze Aufgabe **14** der 4. Übung.

3 (b) Schreibe $|z\rangle$ als normierte Superposition der Energieeigenzustände $|n\rangle$.

2 (c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit des Messens von $|n\rangle$ in $|z\rangle$ einer Poissonverteilung genügt. Was ist der wahrscheinlichste Wert für n?

3 (d) Bestimmen Sie die Unschärfe von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ für den Zustand $|z\rangle$. Zeigen Sie, dass es sich dabei um die minimal mögliche Unschärfe von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ handelt.

4 (e) Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen im kohärenten Zustand $|z_0\rangle$. Geben Sie den Zustand des Teilchens für $t > 0$ an. Zeigen Sie, dass sich das Teilchen $\forall t > 0$ in einem Zustand der Form (5.2) mit $z \neq z_0$ befindet und damit weiterhin Eigenzustand zu $\hat{a}$ ist. Bestimmen Sie den Eigenwert z für $t > 0$.

4 (f) Beschreiben Sie unter Ausnutzung der bisherigen Ergebnisse wie sich die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ mit der Zeit in einem kohärenten Zustand ändern. Zeigen Sie weiter, dass kohärente Zustände zu allen Zeiten die minimale $\hat{x}$-$\hat{p}$-Unschärferelation erfüllen.

17. [*10 Punkte*] **Unendlichtiefe Potentialmulde**

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, welches sich in folgendem Potenial befindet:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad -a \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ (a) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{p}^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ im n-ten Energieeigenzustand des Hamiltonoperators.

$\boxed{8}$ (b) Das Teilchen befinde sich in einer normierten Linearkombination zweier verschiedener, normierter Energieeigenzustände $|u_\ell\rangle$ und $|u_n\rangle$, also $|\psi\rangle = \alpha\,|u_\ell\rangle + \beta\,|u_n\rangle$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
Wie verhält sich der Erwartungswert von $\hat{x}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) während der Zeitentwicklung dieser Wellenfunktion? Steigt, fällt oder oszilliert er? Zerlege die Tripel (k, ℓ, n) disjunkt bezüglich dieser Unterscheidung.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28, `zimboras@lusi.uni-sb.de`
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25, `lin@lusi.uni-sb.de`