(Abgabe: bis zum *02.Dez.2008, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

18. [*8 Punkte*] **Translationsoperator**

Die räumliche Verschiebung einer Wellenfunktion wird durch den Translationsoperator $\hat{T}$ durchgeführt werden:

$$(\hat{T}_a\psi)(x) \equiv \psi_a(x) = \psi(x-a), \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

$\hat{T}_a$ ist dabei gegeben durch $\hat{T}_a = e^{-ia\frac{\hat{p}}{\hbar}}$, wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator ist.

4 (a) Zeigen Sie, dass für die Orts- und Impulsoperatoren die folgenden Relationen gelten:

$$\hat{T}_a^\dagger\,\hat{x}\,\hat{T}_a = \hat{x} + a\hat{I} \quad \text{und} \quad \hat{T}_a^\dagger\,\hat{p}\,\hat{T}_a = \hat{p}\,. \tag{6.1}$$

Hinweis: Leiten Sie zuerst her, wie sich die Erwartungswerte von Ort und Impuls transformieren.

4 (b) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator nur Eigenwerte besitzt, deren Betrag 1 ist. Zeigen Sie ferner, dass

$$\varphi(x) = e^{ikx}u_k(x), \quad \text{mit } u_k(x-a) = u_k(x) \text{ und } k \in \mathbb{R}\,, \tag{6.2}$$

eine Eigenfunktion von $\hat{T}_a$ ist.

19. [*10 Punkte*] **Elektronen in einem periodischen Potential/Energiebänder**

Ein Elektron der Masse m bewegt sich in einem eindimensional periodischen Potential, das durch die positive Ladung der Ionenrümpfe in einem linearen Kristallgitter hervorgerufen wird. Das Potential besitzt eine Periodenlänge a (die Gitterkonstante) so dass $V(x \pm a) = V(x)$.

(a) Sind die Potential-Mulden an jedem Gitterpunkt unendlich tief, so ist die Grundzustandsenergie E_0 entartet. Wir bezeichnen die zu E_0 gehörenden Eigenfunktionen als $v_n(x) \equiv v_0(x-na)$, wobei der Index $n = -\infty \cdots + \infty (\in \mathbb{Z})$ dem Gitterpunkt zugeordnet ist.

2 i. Zeigen Sie, dass der Translationsoperator $\hat{T}_a$ und der Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ kommutieren.

3 ii. Ist die Eigenfunktion $v_n(x)$ von $\hat{H}_0$ auch eine Eigenfunktion von $\hat{T}_a$? Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion in der Form

$$\varphi_\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\vartheta}v_n(x), \qquad \text{mit } \vartheta \equiv ka \in \mathbb{R} \text{ und } -\pi < \vartheta \leq \pi\,, \tag{6.3}$$

eine gemeinsame Eigenfunktion von $\hat{H}_0$ und $\hat{T}_a$ ist. Vergleichen Sie $\varphi_\vartheta(x)$ mit der Wellenfunktion in (6.2).

5 (b) Wir untersuchen nun das Modell mit endlich tiefen Potential-Mulden und nehmen an, dass das betrachtete Elektron stark gebunden ist ("tight-binding approximation"), d.h. die Tunnelwahrscheinlichkeit ist nur für die benachbarten Mulden endlich. In dieser Näherung sind die Matrixelemente des Hamilton-Operators $\hat{H}$ in der $\{v_n\}$-Darstellung gegeben als

$$H_{mn} = \begin{cases} E_0, & m = n \\ -\Delta, & m = n \pm 1 \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die von $\vartheta = ka$ parametrisierte Wellenfunktion $\varphi_\vartheta(x)$ in (6.3) wieder eine Eigenfunktion von $\hat{H}$ ist. Bestimmen Sie die entsprechenden Eigenwerte als Funktion von ϑ.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28, zimboras@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25, lin@lusi.uni-sb.de

20. [*8 Punkte*] **Eindimensionales Streuproblem/Resonanzen**

Wir betrachten das eindimensionale Streuproblem an ein Doppel-δ-Potential:

$$V(x) = V_0[\delta(x+\ell) + \delta(x-\ell)] \qquad \text{mit } V_0 > 0 \text{ und } \ell > 0.$$

$\boxed{7}$ (a) Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten und den Reflexionskoeffizienten. Unter welcher Bedingung entsteht eine totale Transmission?

$\boxed{1}$ (b) Geben Sie die Streumatrix an.

21. [*9 Punkte*] **Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld/Landau-Niveaus**

Betrachtet wird ein *spinloses* Teilchen der Masse m und der Ladung e in einem zeitunabhängigen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$. Der Hamilton-Operator für das System is gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2,$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\pi}} \equiv m\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e\boldsymbol{A}}{c}$ der kinetischen Impuls ist ($\boldsymbol{p}$ ist der kanonische Impuls).

$\boxed{3}$ (a) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j]$ der Komponenten des kinetischen Impulses.

$\boxed{6}$ (b) Sei das Magnetfeld homogen und in z-Richtung gerichtet. Zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für das System gegeben sind durch

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{\hbar|eB|}{mc}(n + \frac{1}{2}), \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \cdots,$$

wobei $\hbar k_z$ der kontinuierliche Eigenwert von $\hat{p}_z$ ist. Geben Sie die Eigenfunktionen an.

Hinweis: Benutzen Sie die Eichung $\boldsymbol{A} = (-By, 0, 0)$ und vergleichen Sie die Eigenwertgleichung von $\hat{H}$ mit der eines harmonischen Oszillators.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28, zimboras@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25, lin@lusi.uni-sb.de