7. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *09.Dez.2008, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

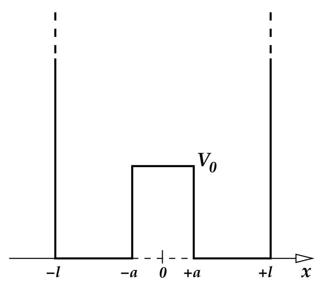
(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

22. [*20 Punkte*] **Doppelmulden-Potential/Zweizustandssystem**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem eindimensional unendlich tiefen Potentialtopf mit einer Barriere der Höhe V_0 in der Mitte (s. Abbildung):

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für } |x| < a \\ \infty & \text{für } |x| \geq \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \qquad (7.1)$$

mit $\ell > a > 0$.



Das Modell beschreibt z.B. das N-Atom in einem Ammoniakmolekül (NH_3), wobei die Potential-Barriere zwischen den zwei Mulden durch den abstossenden Coulomb-Wechselwirkungsterm zwischen dem N-Atom und den H-Atomen verursacht ist

$\boxed{3}$ (a) Angenommen, dass die Potential-Barriere zwischen den zwei Mulden unendlich ist, also $V_0 = \infty$. Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie E_1. E_1 ist zweifach entartet, d.h. es gibt zwei linear unabhängige Eigenfunktionen zu diesem Energieeigenwerten. Bestimmen Sie diese zwei normierten Grundzustandswellenfunktionen. Wir bezeichnen die Grundzustände als u_L und u_R, wobei u_L (u_R) für den Zustand steht, in dem das Teilchen sich in der linken (rechten) Mulde befindet.
Sie können die bekannten Lösungen für den unendlich tiefen Potentialtopf benutzen.

(b) Ist die Potential-Barriere endlich hoch, so kann das Teilchen sich durch den Tunneleffekt zwischen den zwei Mulden bewegen und die Entartung der Grundzustandsenergie in (a) ist aufgehoben. Wir betrachten das Problem zuerst phänomenologisch und berücksichtigen nur den Zustandsraum, der von den beiden orthogonalen Vektoren $|u_L\rangle$ und $|u_R\rangle$ aufgespannt wird. In der $\{u_L, u_R\}$-Basis hat der Hamilton-Operator die folgende Matrixdarstellung:

$$H = \begin{pmatrix} \langle u_L|\hat{H}|u_L\rangle & \langle u_L|\hat{H}|u_R\rangle \\ \langle u_R|\hat{H}|u_L\rangle & \langle u_R|\hat{H}|u_R\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & -\Delta \\ -\Delta & E_1 \end{pmatrix},$$

wobei $\Delta > 0$ den Tunneleffekt charakterisiert.

$\boxed{2}$ i. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenzustand als Linearkombinationen von $|u_L\rangle$ und $|u_R\rangle$.

$\boxed{4}$ ii. Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand

$$|\varphi(t=0)\rangle = c_L\,|u_L\rangle + c_R\,|u_R\rangle$$

mit $c_L, c_R \in \mathbb{C}$. Finden Sie den Zustand zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 lin@lusi.uni-sb.de

3 iii. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand $|u_R\rangle$ (in der rechten Mulde). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit als Funktion von t, das Teilchen im Zustand $|u_L\rangle$ (in der linken Mulde) zu finden.

8 (c) Betrachten wir die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] v(x) = Ev(x)$$

für das in (7.1) angegebene Potential $V(x)$ mit endlichem V_0. Formulieren Sie die Bestimmungsgleichung für die Energieeigenwerte für den Fall $E < V_0$.

23. [*5 Punkte*] **Eichinvarianz der Schrödinger Gleichung**

Der Hamiltonian für die Wechselwirkung einer Ladung q der Masse m mit einem externen elektromagnetischen Feld,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$$
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} - \nabla\Phi(\boldsymbol{x}, t),$$

ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}, t))^2 + q\Phi(\hat{\boldsymbol{x}}, t)$$

mit der dazugehörigen zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t))^2\Psi(\boldsymbol{x}, t) + q\Phi(\boldsymbol{x}, t)\Psi(\boldsymbol{x}, t)$$

Betrachten Sie nun

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) - \nabla f(\boldsymbol{x}, t)$$
$$\Phi'(\boldsymbol{x}, t) = \Phi(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t).$$

(Bemerkung: $(\boldsymbol{A}', \Phi')$ und $(\boldsymbol{A}, \Phi)$ beschreiben die gleichen Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$).

Zeigen Sie, dass falls $\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ die Schrödinger Gleichung löst, dann löst auch

$$\Psi'(\boldsymbol{x}, t) \equiv \exp(-\frac{iq}{\hbar c}f(\boldsymbol{x}, t))\Psi(\boldsymbol{x}, t)$$

die Schrödinger Gleichung mit entsprechenden $\boldsymbol{A}'$ und Φ'.

24. [*10 Punkte*] **Das Tensorprodukt**

3 (a) Das Tensorprodukt (Kronecker Produkt) zweier Matrizen $M = A \otimes B$ wurde in der Vorlesung eingeführt. Zeigen Sie, dass für 2 quadratische Matrizen A und B gilt:

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$$

3 (b) Zeigen Sie, dass falls der zeitunabhängige Hamiltonian eines 2-Teilchen Systems von der Form $H = H_1 \otimes I + I \otimes H_2$ ist (z.B. keine Wechselwirkung zw. den Teilchen), der Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ sich zu $U(t) = U_1(t) \otimes U_2(t)$ ergibt. Mit $U_1(t) = \exp(-itH_1/\hbar)$ und $U_2(t) = \exp(-itH_2/\hbar)$.

4 (c) Betrachten Sie zwei nicht-wechselwirkende Teilchen in einem eindimensionalen harmonischen Potential, beschrieben durch den Hamiltonian:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2). \tag{7.2}$$

Wir bezeichnen den Grundzustand des 2-Teilchen Systems als $|u_0\rangle$, die zwei linear unabhängigen ersten angeregten Eigenzustände als $|u_1\rangle$ und $|v_1\rangle$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im normierten Zustand $|\psi(t = 0)\rangle = \alpha\,|u_0\rangle + \beta\,|u_1\rangle + \gamma\,|v_1\rangle$ mit α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$. Finden Sie den Zustand des Systems zur Zeit $t > 0$.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25
zimboras@lusi.uni-sb.de mape@lusi.uni-sb.de lin@lusi.uni-sb.de