8. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *16.Dez.2008, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

25. [*10 Punkte*] **Drehimpuls**

4 (a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{J}_x \rangle$, $\langle \hat{J}_y \rangle$ und die Unschärfequadrate $(\Delta J_x)^2$, $(\Delta J_y)^2$ der Komponenten des Drehimpulses $\hat{\boldsymbol{J}}$ im Eigenzustand $|j,m\rangle$ zu $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$. Zeigen Sie, dass das Unschärfeprodukt $\Delta J_x \cdot \Delta J_y$ die Unschärferelation erfüllt und es das Minimum erreicht im Zustand $|j, m = \pm j\rangle$.

(b) Betrachtet wird ein Teilchen, das sich in einem Zustand befindet, der durch die normierte Wellenfunktion

$$\psi(x, y, z) = N(x + y + 2z)e^{-\alpha r}$$

beschrieben wird. Mit $\alpha > 0$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. $N > 0$ ist die Normierungskonstante.

4 i. Zeigen Sie, dass ψ eine Eigenfunktion zum Bahndrehimpulsquadrat $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ ist. Geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.

2 ii. Was sind die möglichen Messwerte von $\hat{L}_z$? Geben Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an.

Hinweis: Finden Sie den Zusammenhang zwischen x, y, z und den Kugelfunktionen.

26. [*10 Punkte*] **Stern-Gerlach Experiment**

Ein Strahl von Spin-1/2 Teilchen bestehe aus der inkohärenten Überlagerung zweier Strahlen gleicher Intensität. Die Teilchen in jedem der beiden Strahlen seien vollständig durch Stern-Gerlach Apparaturen polarisiert, einmal in die positive x-Richtung (d.h. im Eigenzustand der Paulimatrix $\hat{\sigma}_x$ mit Eigenwert $+1$) und einmal in die positive y-Richtung.

3 (a) Bestimmen Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ des Systems. Geben Sie $\hat{\rho}$ in Form von

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{I} + \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{8.1}$$

an, wobei $\hat{I}$ der Einheitsoperator und $\boldsymbol{a}$ der Polarisationsvektor des Zustands ist.

3 (b) Bleibt die Gesamtheit der betrachten Spin-1/2 Teilchen, die durch $\hat{\rho}$ in (8.1) beschrieben wird, unter einer unitären Zeitentwicklung gemischt? Oder wandelt sie sich in einen reinen Zustand um?

4 (c) Im Stern-Gerlach Experiment werden die Spinkomponente der Teilchenstrahl im Zustand (8.1) gemessen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei einer Messung der Spinkomponente bezüglich einer z'-Achse, welche mit der z-Achse den Winkel θ einschließt, den Meßwert $+\hbar/2$ bzw. den Meßwert $-\hbar/2$ findet? Wie groß ist der Erwartungswert von $\hat{S}_{z'}$?

27. [*15 Punkte*] **Spinresonanz**

Ein Elektron befindet sich in einem starken homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z$, dem ein schwaches umlaufendes transversales Magnetfeld $\boldsymbol{B}_1(t) = B_1\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x - B_1\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y$ überlagert ist. Der Massenmittelpunkt liegt fest, und wir berücksichtigen nur den Spinfreiheitsgrad, so dass das System durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben wird:

$$\hat{H} = -\frac{ge}{2m_ec}\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{B}(t) = -\gamma\hat{\boldsymbol{S}} \cdot (\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1(t)),$$

wobei g der Landéfaktor ist und $\gamma = ge/2m_ec$.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 lin@lusi.uni-sb.de

4 (a) Wir betrachten den Fall $B_1 = 0$. Angenommen, der Anfangszustand des Spins sei gegeben durch den Spinor (in der S_z-Eigenbasis)

$$|\uparrow_{\boldsymbol{n}}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\phi/2} \\ \\ \sin(\frac{\theta}{2})e^{i\phi/2} \end{pmatrix}.$$

Finden Sie den Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$, so dass $|\uparrow_{\boldsymbol{n}}\rangle$ einen Eigenvektor zu $\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{n}$ mit dem Eigenwert $\hbar/2$ ist. Geben Sie der Zustand zu einem späteren Zeitpunkt t. Wie bewegt sich der Vektor $\boldsymbol{n}$ mit der Zeit?

(b) Wir betrachten nun den Fall $B_1 \neq 0$. Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Eigenzustand $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$ von $\hat{S}_z$ mit dem Eigenwert $+\hbar/2$.

3 i. Wir transformieren den Zustand zur Zeit $|\psi(t)\rangle$ in ein rotierendes Bezugssystem, gegeben durch

$$|\psi_r(t)\rangle = e^{-i\omega t \hat{S}_z/\hbar} |\psi(t)\rangle .$$

Finden Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_r(t)$, der die Zeitentwicklung im rotierenden Bezugssystem bestimmt, $|\psi_r(t)\rangle = \hat{U}_r(t) |\psi_r(0)\rangle$.

5 ii. Wir transformieren nun den Zustand $|\psi_r(t)\rangle$ zurück ins Laborsystem. Geben Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit t als Spaltenvektor in der S_z-Eigenbasis. Drücken Sie das Ergebnis mit $\omega_0 = \gamma B_0$ und $\omega_1 = \gamma B_1$ aus.

3 iii. Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{\uparrow\to\downarrow}(t)$ dafür, dass der Spinzustand des Elektrons zur Zeit t "geflippt" wird. Für welche t wird sie bei Resonanz $\omega = \omega_0$ maximal?

Bemerkung: (i) In der Praxis werden $|\uparrow\rangle \to |\downarrow\rangle$ Übergänge am aufgezeichnete Absorptionsspektrum erkannt. Dies erlaubt eine Messung des g-Faktors. (ii) Bei Resonanz $\omega = \omega_0$ mit $t = \pi/2\omega_1$ erreichen wir den Übergang

$$|\uparrow\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle);$$

dies ist ein wichtiger Operator in Quantencomputing.

Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25
zimboras@lusi.uni-sb.de mape@lusi.uni-sb.de lin@lusi.uni-sb.de