# 9. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Yu-Cheng Lin

(Abgabe: bis zum *06.Jan.2009, 12:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

(Klausur: *Donnerstag, 19.Feb.2009, 9:15 - 13:00 Uhr*)

**28.** [*12 Punkte*] **Zusammengesetztes Spinsystem**

Wir betrachten ein System, das aus drei verschiedenen Teilchen mit jeweils Spin 1/2 besteht.

$\boxed{7}$ (a) Betrachten Sie den Gesamtspin $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2 + \hat{\boldsymbol{S}}_3$ ($\hat{\boldsymbol{S}}_i$: der Spinoperator des Teilchens $i$). Welche Werte kann die Quantenzahl $s$ des Gesamtspins annehmen? Finden Sie das gemeinsame System von Eigenvektoren von $\hat{S}^2$ und $\hat{S}_z$. Drücken Sie die Eigenvektoren als Linearkombination der Produktbasisvektoren aus.

$\boxed{5}$ (b) Das System werde durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \alpha\big(\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 + \hat{\boldsymbol{S}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_3 + \hat{\boldsymbol{S}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_1 - \hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} - \hat{S}_{2z}\hat{S}_{3z} - \hat{S}_{3z}\hat{S}_{1z}\big)\,.$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und ihre Entartungsgrade.

**29.** [*8 Punkte*] **Projektionstheorem**

$\boxed{4}$ (a) Zeigen Sie aus der (nicht zu beweisenden) Identität

$$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\boldsymbol{J}} \times \hat{\boldsymbol{V}}] = 2i\hbar\big(\hat{\boldsymbol{J}}^2\hat{\boldsymbol{V}} - (\hat{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{V}})\hat{\boldsymbol{J}}\big)$$

dass für den Drehimpuls-Operator $\hat{\boldsymbol{J}}$ und den Vektoroperator $\hat{\boldsymbol{V}}$ folgendes gilt:

$$\langle jm'|\hat{\boldsymbol{V}}|jm\rangle = \frac{\langle jm|(\hat{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{V}})|jm\rangle}{\hbar^2 j(j+1)}\langle jm'|\hat{\boldsymbol{J}}|jm\rangle,$$

wobei $|jm\rangle$ das gemeinsame System von Eigenvektoren zu $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ ist.

$\boxed{4}$ (b) Betrachten Sie ein Elektron. Wir kennen die Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell$ und die $z$-Komponente $m$ (die magnetische Quantenzahl) seiner Gesamtdrehimpulsquantenzahl $j$. Was sind die möglichen Werte von $j$? Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators für das magnetische Moment

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{e}{2m_e c}(g_L\hat{\boldsymbol{L}} + g_S\hat{\boldsymbol{S}})$$

in den bekannten Eigenzuständen $|jm\rangle$ von $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$, mit $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$. Setzen Sie $g_L = 1$ und $g_S = 2$ um die Antwort anzugeben.

**30.** [*9 Punkte*] **Kugelsymmetrisches Problem**

Ein Teilchen der Masse $\mu$ bewegt sich in einem Zentralpotential $V(|\hat{\boldsymbol{x}}|)$. Die Gemeinsame Eigenzustände von $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ seien durch $|n\ell m\rangle$ gegeben ($\hat{H}$: Hamilton-Operator; $\hat{\boldsymbol{L}}$: Bahndrehimpuls).

$\boxed{3}$ (a) Weisen Sie explizit nach, dass $[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}] = 0$ gilt.

$\boxed{2}$ (b) Begründen Sie mit Hilfe von (a), warum die Energieeigenwerte $E_{n\ell m}$ nicht von $m$ abhängen können.

$\boxed{4}$ (c) Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie und die Eigenfunktionen eines Teilchens, das in einer kugelförmigen Box mit Radius $R$ eingeschlossen ist.

**31.** [*6 Punkte*] **Störungstheorie**

Angenommen der Hamilton-Operator eines Starren Rotators in einem Magnetfeld senkrecht zur Achse des Rotators sei von der Form

$$A\hat{\boldsymbol{L}}^2 + B\hat{L}_z + C\hat{L}_y.$$

Sei $B \gg C$, benutzen sie Störungstheorie bis hin zur geringsten nicht verschwindenden Ordnung um eine Abschätzung für die Energieeigenwerte zu erhalten.



Zoltán Zimborás, E2.6 Zi.4.28 zimboras@lusi.uni-sb.de
Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 mape@lusi.uni-sb.de
Yu-cheng Lin, E2.6 Zi.4.25 lin@lusi.uni-sb.de