WS 2008/2009
Donnerstag, 19.Feb.2009, 9^{15}-13^{00} Uhr

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Klausur zur Theoretischen Physik III

Name ______________________

Vorname ______________________

Matrikel-Nr. ______________________

Studiengang ______________________

Aufgabe Nr.	Punktzahl	Davon erreicht
1	19	
2	10	
3	14	
4	10	
5	12	
6	10	
7	5	
Summe	80	

Formelsammlung:

(1) Die Konvention zur Fourier-Transformation:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int d^n p\, e^{\frac{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{\hbar}} \widetilde{\psi}(\boldsymbol{p}) \quad \text{und} \quad \widetilde{\psi}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int d^n x\, e^{\frac{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{\hbar}} \psi(\boldsymbol{x})$$

mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$

(2) Integraldarstellung der Diracschen δ-Funktion in n-Dimensionen:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n k\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n p\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}$$

(3) Baker-Campbell-Hausdorff-Relation: ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$e^{i\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-i\lambda\hat{A}} = \hat{B} + \frac{i\lambda}{1!}[\hat{A},\hat{B}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{(i\lambda)^3}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \cdots$$

und

$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \quad \text{wenn } [[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0.$$

(4) Für die Eigenzustände $|j,m\rangle$ zu $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ ($\hat{\boldsymbol{J}}$: Drehimpulsoperator) gilt:

$$\hat{J}_z\,|j,m\rangle = \hbar m\,|j,m\rangle \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{J}}^2\,|j,m\rangle = \hbar^2\, j(j+1)\,|j,m\rangle$$

Wirkung der Leiter-Operatoren $\hat{J}_\pm := \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ auf $|j,m\rangle$:

$$\hat{J}_\pm\,|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)}\,|j, m\pm 1\rangle$$

(5) Pauli-Matrizen:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(6) Laplace-Operator in Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten (ρ,ϕ,z)

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(7) Gauß-Integral:

$$I(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2 + \beta x} = e^{\beta^2/4\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2},$$

auch für komplexe α und β, sofern Re $\alpha > 0$.

(8) Einige Kugelfunktionen $Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ explizit:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta; \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{i\varphi}$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter!

1. [*19 Punkte*] **Kurzfragen**

1 (a) Ein System befindet sich in einem normierten Zustand $|\psi\rangle = \alpha|\phi_1\rangle + \beta|\phi_2\rangle$ mit $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$ und $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Zustandsvektoren bzw. Dichteoperatoren beschreiben einen physikalisch äquivalenten Zustand wie $|\psi\rangle$?

(A) $e^{i\vartheta}\big(\alpha|\phi_1\rangle + \beta|\phi_2\rangle\big)$ mit $\vartheta \in \mathbb{R}$

(B) $e^{i\vartheta_1}\alpha|\phi_1\rangle + e^{i\vartheta_2}\beta|\phi_2\rangle$ mit $\vartheta_1,\ \vartheta_2 \in \mathbb{R}$ und $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$

(C) $\alpha|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \beta|\phi_2\rangle\langle\phi_2|$

(D) $\alpha\alpha^*|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \alpha\beta^*|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + \alpha^*\beta|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + \beta\beta^*|\phi_2\rangle\langle\phi_2|$

(E) $\alpha\alpha^*|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \beta\beta^*|\phi_2\rangle\langle\phi_2|$

(F) $\alpha|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + \beta|\phi_2\rangle\langle\phi_1|$

2 (b) Eine Punktladung q befindet sich in einem elektromagnetischen Feld, das durch ein Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ und ein skalares Potential $\Phi(\boldsymbol{x})$ beschrieben wird. Man führt eine Eichtransformation

$$\boldsymbol{A} \to \widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \qquad \Phi \to \widetilde{\Phi} = \Phi,$$

mit einer skalaren Funktion $\Lambda(\boldsymbol{x})$ durch. Ist der Erwartungswert des kanonischen Impulses $\boldsymbol{p}$ eichinvariant? (Begründung!)

2 (c) Zeigen Sie, dass ein reiner (gemischter) Zustand unter einer unitären Zeitentwicklung rein (gemischt) bleibt.

2 (d) Berechnen Sie die folgende Kommutatoren:
(i) $[\hat{J}_x,\ \boldsymbol{p}^2]$; (ii) $[\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{T}_{\boldsymbol{a}}]$; (iii) $[\hat{\Pi},\ \hat{\boldsymbol{L}}]$; (iv) $[\hat{p}_x,\ e^{\hat{x}}]$
($\hat{\boldsymbol{J}}$: Drehimpulsoperator; $\hat{\boldsymbol{L}}$: Bahndrehimpulsoperator; $\hat{\boldsymbol{x}}$: Ortsoperator; $\hat{\boldsymbol{p}}$: Impulsoperator; $\hat{\Pi}$: Paritätsoperator; $\hat{T}_{\boldsymbol{a}}$: räumlicher Translationsoperator um eine Verschiebung $\boldsymbol{a}$)

3 (e) Ein Punktteilchen der Masse m bewegt sich in einem eindimensionalen Potentialtopf der Form:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ -V_0\ (<0) & \text{für } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{für } x > a\,, \end{cases}$$

Schreiben Sie den Lösungsansatz für die Energieeigenfunktionen für Energieeigenwerte $-V_0 < E < 0$ auf. Geben Sie die Rand- und Anschlußbedingungen für die Bestimmung der Energieeigenwerte an.

3 (f) Betrachten Sie die eindimensionale Bewegung eines Punktteilchens der Energie E in Gegenwart eines Doppel-δ-Potentials:

$$V(x) = V_0\big[\delta(x) + \delta(x-\ell)\big] \qquad \text{mit } V_0 > 0 \quad \text{und } \ell > 0.$$

Schreiben Sie den Lösungsansatz für die Energieeigenfunktionen für den Fall $E < V_0$ auf. Geben Sie die Rand- und Anschlußbedingungen für die Bestimmung der Transmissions- bzw. Reflexionskoeffizienten an. Was versteht man unter Resonanzen?

$\boxed{1}$ (g) Der Bahndrehimpuls $\hat{\boldsymbol{L}}$ mit $\ell = 1$ und der Spin $\hat{\boldsymbol{S}}$ mit $s = 1$ werden kombiniert. Welche Eigenwerte können $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ annehmen? ($\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$)

$\boxed{2}$ (h) Vorgegeben sei der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2m^2c^2r^3}\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}} - \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^4}{8m^3c^2}$$

(i) Erläutern Sie kurz die Bedeutung der einzelnen Terme in $\hat{H}$.

(ii) Warum benutzt man in erster Ordnung Störungsrechnung besser die Zustände $|n, \ell, j, m_j\rangle$ als die Zustände $|n, \ell, s, m_s\rangle$?

$\boxed{2}$ (i) Zeigen Sie, dass bei einer elastischen Streuung an einem translationsinvarianten Potential $V(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})$ ($\boldsymbol{a}$ ein konstanter Vektor) die Bedingung für nichtverschwindende Streuamplitude in erster Bornscher Näherung gegeben ist durch

$$(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \cdot \boldsymbol{a} = 2\pi\hbar n \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ der Impuls im Anfangs- und im Endzustand sind.

$\boxed{1}$ (j) Betrachten Sie ein 2-Teilchen-System. $\{|m\rangle_i\}_{m\in\mathbb{N}}$ und $\{|n\rangle_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ (mit $i = a, b$) seien die Basisvektoren des Hilbertraums, der dem i-ten Teilchen zugeordnet ist. Welche der folgenden Zustände sind verschränkt ($m \neq n$)?

(A) $|m\rangle_a \otimes |n\rangle_b$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|m\rangle_a \otimes |m\rangle_b + |n\rangle_a \otimes |n\rangle_b\big)$

(C) $\frac{1}{2}\big(|m\rangle_a + |n\rangle_a\big) \otimes \big(|m\rangle_b - |n\rangle_b\big)$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|m\rangle_a \otimes |n\rangle_b - |n\rangle_a \otimes |m\rangle_b\big)$

2. [*10 Punkte*] **Dynamik freier Teilchen: Heisenberg-Bild vs. Schrödinger-Bild**

$\boxed{5}$ (a) Wir betrachten die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in einer räumlichen Dimension. Zeigen Sie (im Heisenberg-Bild) mittels der Unschärferelation für die Ortsoperatoren $\hat{x}(t)$ zur Zeit $t > 0$ und $\hat{x}(0)$ zur Zeit $t = 0$, dass im Lauf der Zeit das Ortsunschärfequadrat des Teilchens Δ_x^2 anwächst.

$\boxed{5}$ (b) Die Wellenfunktion eines freien Teilchens der Masse m sei zur Zeit $t = 0$ gegeben durch $\psi(\boldsymbol{x}, t = 0)$ (mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$). Die Wellenfunktion zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ kann durch

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \int d^3x' G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', 0)\psi(\boldsymbol{x}', 0)$$

beschrieben werden. Bestimmen Sie den Propagator $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', 0)$.

3. [*14 Punkte*] **Teilchen im harmonischen Potential/Störungstheorie**

Gegeben sei ein eindimensionales harmonisches Potential in der Ortsdarstellung

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad \text{mit } m, \omega \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in diesem Potential bewegt. Wir führen den Vernichtungsoperator ein:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{x_0}\hat{x} + i\frac{x_0}{\hbar}\hat{p}\Big) \qquad \text{mit } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

wobei $\hat{x}$ der Ortsoperator und $\hat{p}$ der Impulsoperator ist.

1 (i) Zeigen Sie, dass die Relation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$ gilt ($\hat{I}$: der Einheitsoperator).

3 (ii) Leiten Sie den Hamilton-Operator der Form

$$\hat{H} = \hbar\omega\Big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hat{I}}{2}\Big).$$

her. $\hat{a}^\dagger$ ist der zu $\hat{a}$ adjungierte Operator.

4 (iii) Bestimmen Sie die normierte Grundzustandswellenfunktion $u_0(x)$ (mit Hilfe der Wirkung des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ auf u_0).

(b) Wir haben nun zwei unterscheidbare Teilchen der gleichen Masse m im betrachteten harmonischen Potential. Zwischen den beiden Teilchen besteht eine schwache Wechselwirkung der Form: $W(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \lambda m\omega^2 \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2$, wobei $0 < \lambda \ll 1$ und $\hat{x}_i$ $(i = 1, 2)$ der Ortsoperator des i-ten Teilchens ist. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie

3 (i) die Grundzustandsenergie des Zweiteilchensystems;

3 (ii) die erste angeregte Energie des Zweiteilchensystems.

4. [*10 Punkte*] **Rotation und Drehimpuls**

4 (a) Berechnen Sie die Summe der Unschärfequadrate $\Delta^2_{Lx} + \Delta^2_{Ly}$ der Komponenten des Bahndrehimpulses $\hat{\boldsymbol{L}}$ in einem Eigenzustand $|\ell, m\rangle$ von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$. Für welche Werte von ℓ und m verschwindet die Summe?

(b) Ein Ensemble von Spin-1/2 Teilchen wird in einem reinen Zustand $\alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ (mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) präpariert, wobei $|+\rangle$ ($|-\rangle$) der Eigenzustand der Paulimatrix $\hat{\sigma}_z$ zum Eigenwert $+1\,(-1)$ ist.

2 (i) Eine Messung der z-Komponente des Spins wird unmittelbar nach dem Präparieren durchgeführt. Geben Sie den Dichteoperator an, der die Spinzustände des Teilchenensembles nach dieser Messung beschreibt.

4 (ii) Unmittelbar nach der Messung in (i) erfolgt eine Messung der Spinkomponente $\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{n}$ in Richtung $\boldsymbol{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi,\, \sin\vartheta\sin\varphi,\, \cos\vartheta)$. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Messergebnisse.

5. [*12 Punkte*] **Zusammengesetztes Spinsystem/Zeitabhängige Phänomene**

4 (a) Zwei Spin-1/2-Operatoren $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ und $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ koppeln zu einem Gesamtspin $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$. Konstruieren Sie den Projektor $\hat{P}_0$ auf den Singulett-Unterraum und den Projektor $\hat{P}_1$ auf den Triplett-Unterraum, mit $\hat{P}_i\hat{P}_j = \delta_{ij}\hat{P}_j$. Drücken Sie $\hat{P}_0$ und $\hat{P}_1$ jeweils als eine Linearkombination des Einheitsoperators $\hat{I}$ und des Operatorproduktes $\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2$ aus.

(b) Betrachten Sie ein aus zwei Spin-1/2 Teilchen bestehendes System. Der Spinanteil des Hamilton-Operators des Systems hat die folgende Zeitabhängigkeit:

$$\hat{H} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \lambda \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 & t > 0, \end{cases}$$

wobei $0 < \lambda < 1$ und $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i$ $(i = 1, 2)$ der Pauli-Operator des Teilchens i ist. Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Produktzustand $|+-\rangle \equiv |+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2$, wobei $|+\rangle_i$ $(|-\rangle_i)$ mit $i = 1, 2$ der Eigenzustand von $\sigma_{z,i}$ zum Eigenwert $+1$ (-1) ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zur Zeit $t > 0$ das System in den Zustand $|-+\rangle \equiv |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2$ übergeht.

$\boxed{4}$ (i) Lösen Sie das Problem exakt.

$\boxed{4}$ (ii) Lösen Sie das Problem in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie für kleine Werte von λ.

6. [*10 Punkte*] Kugelsymmetrische Potentiale: gebundene Zustände und Streuung

$\boxed{5}$ (a) Ein Punktteilchen der Masse m bewegt sich frei in einer Kugelschale zwischen zwei konzentrischen harten Kugeln mit den Radien a bzw. b $(b > a)$. Das kugelsymmetrische Potential wird also durch

$$V(|\boldsymbol{x}|) = V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a < r < b \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie und die normierte Wellenfunktion des Grundzustandes (entspricht einem s-Zustand).

(b) Berechnen Sie in erster Bornscher Näherung für die elastische Streuung von spinlosen Teilchen der Masse m, Energie $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ an einem Gaußschen Potential:

$$V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2},$$

($V_0 > 0$ und a sind Konstanten; $r = |\boldsymbol{x}|$ ist der Betrag des Ortsvektors)

$\boxed{3}$ (i) den differentiellen Wirkungsquerschnitt (Streuquerschnitt) $d\sigma/d\Omega$ (bis auf konstante Faktoren)

$\boxed{2}$ (ii) den totalen Wirkungsquerschnitt

7. [*5 Punkte*] Zwei-Fermion-System

Zwei Elektronen (identische Fermionen mit Spin 1/2) bewegen sich kräftfrei mit den Impulsen $\hbar \boldsymbol{k}_1$ und $\hbar \boldsymbol{k}_2$.

$\boxed{4}$ (a) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ des Zwei-Fermion-Systems. Unterscheiden Sie hierbei die beiden Möglichkeiten, dass der Spinzustand des Zweiteilchensystems ein Singulett bzw. ein Triplett ist.

$\boxed{1}$ (b) Für welchen Spinzustand ist der Ortszustand des betrachteten Zwei-Fermion-Systems identisch zu dem Ortszustand eines freien Zwei-Boson-Systems mit Spin 0?

Hinweis: Führen Sie die Relativkoordinate $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ und die Schwerpunktkoordinate $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)/2$ ein.