Theoretische Physik III
Quantentheorie I

YU-CHENG LIN

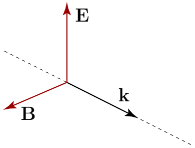
Wintersemster 08/09

Einführung

Polarisiertes Licht

EM-Wellengleichungen

$$\left(\nabla^2 - \tfrac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\boldsymbol{B} = 0$$
$$\left(\nabla^2 - \tfrac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\boldsymbol{E} = 0$$



eine Lösung

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}; \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$$

wobei $\omega = ck$ und $\boldsymbol{E}_0,\ \boldsymbol{B}_0$ komplexe Vektoren

Polarisation

$$\boldsymbol{k}||\boldsymbol{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_0 = E_x\boldsymbol{e}_x + E_y\boldsymbol{e}_y \doteq \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_x|e^{i\delta_x} \\ |E_y|e^{i\delta_y} \end{pmatrix}$$

Linear:

$$E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \frac{E}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm 1\end{pmatrix}$$

linkszirkular:

$$\frac{E}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

rechtszirkular:

$$\frac{E}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

Polarisationszustände

$$\boldsymbol{k} \| \boldsymbol{e}_z : \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Normierung}]{} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{e}_{\leftrightarrow}$: horizontal($x$-) polarisiert; $\boldsymbol{e}_{\updownarrow}$: vertikal($y$-) polarisiert

$$\boldsymbol{e}_{\leftrightarrow} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{e}_{\updownarrow} \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis für $\mathbb{C}^2$

$$\boldsymbol{e}_{\leftrightarrow} \perp \boldsymbol{e}_{\updownarrow} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{e}_{\leftrightarrow}, \boldsymbol{e}_{\updownarrow} \rangle = \begin{pmatrix} 1^* & 0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- $\boldsymbol{e}_{\curvearrowleft}$: linkszirkular polarisiert; $\boldsymbol{e}_{\curvearrowright}$: rechtszirkular polarisiert

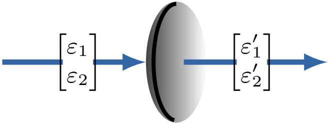
$$\boldsymbol{e}_{\curvearrowleft} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_{\curvearrowright} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_{\curvearrowleft} \perp \boldsymbol{e}_{\curvearrowright} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{e}_{\curvearrowleft}, \boldsymbol{e}_{\curvearrowright} \rangle = \begin{pmatrix} 1^* & i^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0$$

$\boldsymbol{e}_{\curvearrowleft}, \boldsymbol{e}_{\curvearrowright}$ auch eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^2$

Polarisatoren

Polarisator $\hat{P}$



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \varepsilon_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}}_{\hat{P}} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

- Polarisator für $\boldsymbol{e}_\leftrightarrow \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{P}_\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{P}_\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \hat{P}_\leftrightarrow \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Polarisator für $\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^* & \varepsilon_2^* \end{pmatrix} \qquad \text{(dyadisches Produkt)} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_1^* & \varepsilon_1 \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_2 \varepsilon_1^* & \varepsilon_2 \varepsilon_2^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Intensitätsmessungen

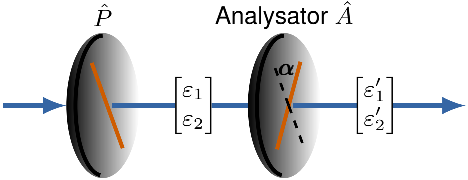
Lichtintensität

der zeitliche Energiemittelwert, der auf eine bestimmte Fläche trifft

$$I \propto |\boldsymbol{S}| \propto |\boldsymbol{E}|^2$$

$\boldsymbol{S}$: Poynting-Vektor

Messungen



Lichtintensität hinter dem Analysator

$$I' = I \cos^2 \alpha \qquad \text{(Gesetz von Malus)}$$

Lichtquanten: Photonen

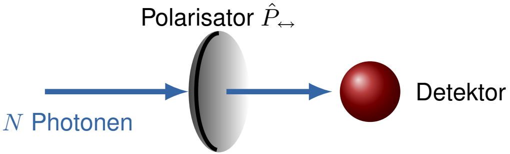
- **QM:** Licht besteht aus Photonen der Energie $\hbar\omega$, Geschwindigkeit c und Impuls $\hbar\boldsymbol{k}$
- Polarisationszustände eines Photons (in der $\boldsymbol{e}_\leftrightarrow, \boldsymbol{e}_\updownarrow$-Basis)

$$
\begin{array}{c|r|l}
\boldsymbol{e}_\leftrightarrow & |\leftrightarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \langle\leftrightarrow| = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_\updownarrow & |\updownarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \langle\updownarrow| = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_\nearrow & |\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \langle\nearrow| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_\searrow & |\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} & \langle\searrow| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_\curvearrowleft & |\curvearrowleft\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} & \langle\curvearrowleft| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_\curvearrowright & |\curvearrowright\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} & \langle\curvearrowright| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- Intensität:

$$I \propto N \quad \text{(Photonenzahl)}$$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation



- Die Wahrscheinlichkeit w für ein Photon im Polarisationszustand $|\psi\rangle$ (vor dem Polarisator), im Detektor zu treffen:

$$|\psi\rangle = \varepsilon_1 |\leftrightarrow\rangle + \varepsilon_2 |\updownarrow\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad w = |\varepsilon_1|^2$$

Bsp:
$$\begin{array}{lcl} |\psi\rangle = |\nearrow\rangle & \Rightarrow & w = 1/2 \\ |\psi\rangle = |\curvearrowleft\rangle & \Rightarrow & w = 1/2 \\ |\psi\rangle = |\updownarrow\rangle & \Rightarrow & w = 0 \end{array}$$

- Frage: Unterschied zwischen

$$\left\{ N \text{ Photonen in } |\nearrow\rangle \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{N}{2} \text{ Photonen in } |\leftrightarrow\rangle, \frac{N}{2} \text{ in } |\updownarrow\rangle \right\}$$

Allgemeiner Formalismus der Quantenmechanik

Hilbertraum

- Die QM spielt sich im komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ab
- Ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
- In $\mathcal{H}$ ist ein Skalarprodukt definiert

$$\begin{aligned} \langle\ |\ \rangle : \quad & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} \\ & (u, w) \mapsto \langle u|w\rangle \end{aligned}$$

mit

  (i) Linearität: $\langle v|\alpha u + \beta w\rangle = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|w\rangle, \ \forall u, v, w \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
  Semilinearität: $\langle \alpha u + \beta w|v\rangle = \alpha^*\langle u|v\rangle + \beta^*\langle w|v\rangle$
  (ii) Positive Definitheit: $\langle u|u\rangle \geq 0$, $\langle u|u\rangle = 0$ genau dann, wenn $u = 0$
  (iii) Symmetrie: $\langle u|w\rangle = \langle w|u\rangle^*$

- $\mathcal{H}$ ist vollständig bezüglich der durch $\|u\| := \sqrt{\langle u|u\rangle}$ definierten Norm
- $\mathcal{H}$ ist isomorph zu seinem Dualraum $\mathcal{H}^*$
- Beispiele:
  - $\mathbb{C}^n$: Menge aller n-Tupel von komplexen Zahlen, mit dem Skalarprodukt $\langle u|w\rangle = \sum_i^n u_i^* w_i$
  - $\mathcal{L}^2(\Omega)$: Raum der quadratintegriebaren Funktionen $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \int_\Omega f^*(x)g(x)dx$
- Dirac-Notation: Vektor in $\mathcal{H}$: $|u\rangle$; Linearform in $\mathcal{H}^*$: $\langle u|$

Lineare Operatoren in der QM

$$\hat{A} : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

$$\hat{A}(\alpha_1|\phi_1\rangle + \alpha_2|\phi_2\rangle) = \alpha_1 \hat{A}|\phi_1\rangle + \alpha_2 \hat{A}|\phi_2\rangle$$

$$\forall |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \in \mathcal{D}_A, \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

- $\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}$
  $\hat{A}\hat{B} \underset{???}{=} \hat{B}\hat{A}$ (die Reihenfolge der Operatoren im Produkt ist wichtig!)
  Kommutator: $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
- Beschränkter Operator $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\hat{A} : \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad \exists\, c \geq 0 : \ \|\hat{A}\psi\| \leq c\|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

- Zu $\hat{A}$ adjungierter Operator

$$\langle \hat{A}^\dagger \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{A}\psi \rangle$$

- Operatoren in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

hermitesch	$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$	$\lambda \in \mathbb{R}$	
unitär	$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}$	$\|\lambda\| = 1$	λ: EW
Projektor	$\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger$	$\lambda = 0, 1$	
positiv	$\langle\psi\|\hat{A}\psi\rangle \geq 0, \ \forall\psi \in \mathcal{H}$	$\lambda \geq 0$	

Darstellung

wähle eine ON-Basis für $\mathcal{H}$: $\{|u_n\rangle\}$

Orthonormalität: $\langle u_m|u_n\rangle = \delta_{mn}$; Vollständigkeit: $\hat{I} = \sum_n |u_n\rangle\langle u_n|$

- Darstellung eines Ket-Vektors $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle = \sum_n \alpha_n |u_n\rangle \quad \text{mit } \alpha_n = \langle u_n|\psi\rangle$$

  als Spaltenvektor

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\psi\rangle \\ \langle u_2|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Darstellung eines Bra-Vektors $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$
  als Zeilenenvektor

$$\langle\psi| \doteq (\langle\psi|u_1\rangle, \langle\psi|u_2\rangle, \cdots) = (\langle u_1|\psi\rangle^*, \langle u_2|\psi\rangle^*, \cdots)$$

- Darstellung eines Operators $\hat{A} \in \mathcal{B}(H)$
  als quadratische Matrix:

$$\hat{A} \doteq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ldots \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_{mn} = \langle u_m|\hat{A}|u_n\rangle$$

Quantenzustände

Ein Quantenzustand wird vollständig (bis auf eine komplexe Phase) durch einen Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1$ beschrieben.

Bsp: Polarisation von Photonen
$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, ONB-Vektoren $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $|a|^2 + |b|^2 = 1$

Reine Gesamtheit

Die untersuchten Systeme sind alle in ein und demselben Zustand

Eine reine Gesamtheit (oder ein reiner Zustand) wird durch einen Dichteoperator in der Form

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{(ein Projektor)}$$

beschrieben

Dichteoperator

- hermitesch: $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$
- normiert: $\mathrm{tr}(\hat{\rho}) = 1$
- positiv: $\langle u|\hat{\rho}|u\rangle \geq 0 \quad \forall\, |u\rangle$
- für eine reine Gesamtheit: $\hat{\rho^2} = \hat{\rho}$

Zustandsensembles

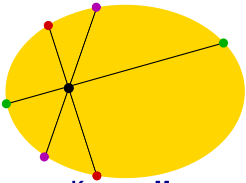
Motivation: unpolarisiertes Licht

Gemischte Gesamtheit

Eine gemischte Gesamtheit entsteht durch Mischung aus reinen Zuständen $|\psi_i\rangle$ mit den Gewichten $p_i \geq 0$

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \qquad (\sum_i p_i = 1)$$

- Die Zerlegung einer gemischten Gesamtheit in reine Zustände ist nicht eindeutig



Konvexe Menge

- Für eine gemischte Gesamtheit

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho} \quad \text{und} \quad \mathrm{tr}(\rho^2) < 1$$

Observable

Der Meßapparat für eine bestimmte physikalische Größe (Observable) wird in der Regel durch einen hermiteschen Operator:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$

dargestellt. Funktionen von Observablen werden durch die entsprechenden Funktionen der Operatoren dargestellt.

Spektralzerlegung

Eigenwertproblem: $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ mit $a \in \mathbb{R}$

$$\langle a|a'\rangle = \delta_{aa'}, \qquad \hat{I} = \textstyle\sum_a |a\rangle\langle a|$$

$$\hat{A} = \textstyle\sum_a a\hat{P}_a$$

(Spektralzerlegung)

mit $\hat{P}_a = \sum_{\text{ON } |a\rangle \in \text{Eig}(a)} |a\rangle\langle a|$: der Projektor auf den Eigenraum zum EW a

Messungen

Die möglichen Meßergebnisse einer Observablen $\hat{A}$ sind die Eigenwerte $\{a\}$

- Die Wahrscheinlichkeit, a' als Meßergebnis im Zustand $\hat{\rho}$ zu erhalten, beträgt
$$w_{a'} = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{P}_{a'})$$
$\hat{P}_{a'}$: der Projektor auf den Eigenraum zum EW a'
- Der Erwartungswert wird gegeben durch
$$\langle\hat{A}\rangle_\rho = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{A})$$
- Schwankung der Meßresultate
$$\Delta_A = \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle_\rho - \langle\hat{A}\rangle_\rho^2} \in \mathbb{R}$$

Andere Ausdrücke für einen reinen Zustand $|\psi\rangle$:

$$w_{a'} = \langle\psi|\hat{P}_{a'}|\psi\rangle = \sum_{\text{ON } |a'\rangle\in \mathrm{Eig}(a')} |\langle a'|\psi\rangle|^2 \qquad (\text{ohne Entartung}: w_{a'} = |\langle a'|\psi\rangle|^2)$$

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$