Messungen(Wiederholung)

Die möglichen Meßergebnisse einer Observablen $\hat{A}$ sind die Eigenwerte $\{a\}$

- Die Wahrscheinlichkeit, a' als Meßergebnis im Zustand $\hat{\rho}$ zu erhalten, beträgt

$$w_{a'} = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{P}_{a'})$$

$\hat{P}_{a'}$: der Projektor auf den Eigenraum zum EW a'

- Nach einer Messung mit Ergebnis a' befindet sich das System im Zustand

$$\hat{\rho}_{a'} = \frac{\hat{P}_{a'}\hat{\rho}\hat{P}_{a'}}{\mathrm{tr}(\hat{P}_{a'}\hat{\rho}\hat{P}_{a'})} \quad \left(\text{reiner Zustand:} |\psi\rangle \to \frac{\hat{P}_{a'}|\psi\rangle}{\|\hat{P}_{a'}|\psi\rangle\|}\right)$$

- Der Erwartungswert wird gegeben durch

$$\langle\hat{A}\rangle_\rho = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{A})$$

- Schwankung der Meßresultate

$$\Delta_A = \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle_\rho - \langle\hat{A}\rangle_\rho^2} \in \mathbb{R}$$

Unschärferelation

- Zwei hermitesche Matrizen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ haben genau dann ein VON-System von gemeinsamen Eigenvektoren, wenn $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.
- Für zwei Observablen $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ und $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$ gilt die Ungleichung

$$\boxed{\Delta_A \cdot \Delta_B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\rho \right|} \quad \forall \, \hat{\rho}$$

  Diese Ungleichung gilt für die Standardabweichungen der Resultate von hinreichend vielen unabhängigen Messungen der Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ an hinreichend vielen identischen Zuständen $\hat{\rho}$.
- (später:) Kanonische Vertauschungsrelation

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}$$

  (unbeschränkte Operatoren:) $\hat{x}$: Ortsoperator; $\hat{p}$: Impulsoperator

$$\Longrightarrow \qquad (\Delta_x)(\Delta_p) \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{(Heisenbergsche Unschärferelation)}$$

Dynamik

Jedes geschlossene System ist charakterisiert durch einen Hamilton-operator (Energieoperator) $\hat{H}$, der den unitären Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t,t_0)$ bestimmt:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{U}(t,t_0) = \hat{H}\hat{U}(t,t_0) \quad \text{(Schrödinger-Gl.)}$$

Zur Zeit t_0 sei $\hat{\rho}_0$ präpariert worden. Der Erwartungswert einer Observablen $\hat{A}$ bei einer Messung zur Zeit $t > t_0$ ist gegeben durch

$$\mathrm{tr}(\hat{U}\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger\hat{A}) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U})$$

- SchrödingerBild:
  $$\hat{\rho}_t = \hat{U}(t,t_0)\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger(t,t_0)$$
  oder für reine Zustände $|\psi\rangle$
  $$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$
- HeisenbergBild:
  $$\hat{A}_h := \hat{A}_t = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}\hat{U}(t,t_0)$$
- $\hat{H}$ zeitunabhängig (isolierte Quantensysteme)

$$\Longrightarrow \quad \hat{U}(t,t_0) = \hat{U}(t-t_0) = e^{-i\,(t-t_0)\hat{H}/\hbar}$$

ZeitentwicklungsOperator

- Eigenschaft der Komposition:

$$\hat{U}(t_2, t_0) = \hat{U}(t_2, t_1)\hat{U}(t_1, t_0); \qquad t_2 > t_1 > t_0$$

- $\hat{U}$ ist unitär $\Longleftarrow$ Erhaltung der Wahrscheinlichkeit ($\mathrm{tr}(\hat{\rho}_t) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}_0)$)

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}_t) = \mathrm{tr}(\hat{U}\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}_0) = 1$$

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$$

- $\hat{H}$ als Erzeuger der Zeittranslation
  infinitesimale Zeittraslation: $\hat{U}(s, 0) := \hat{U}(s)$ mit $s \ll 1$

$$\hat{U}(s) = \hat{I} + s\left.\frac{d\hat{U}}{ds}\right|_{s=0} + \mathcal{O}(s^2)$$

$$\hat{I} = \hat{U}\hat{U}^\dagger \quad \Rightarrow \left.\frac{d\hat{U}}{ds}\right|_{s=0} = -i\hat{K} \text{ mit } \hat{K} = \hat{K}^\dagger$$

$$[\hat{K}] = [\tfrac{1}{\text{Zeit}}] \xrightarrow[E=\hbar\omega]{} \hat{K} = \frac{\hat{H}}{\hbar}$$

BewegungsGleichungen

- Schrödinger-Gl: Zeitentwicklung der Zustände:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

- Von-Neumann-Gl (Liouville): Zeitentwicklung der Dichteoperatoren:

$$\frac{\partial\hat{\rho}_t}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}_t]$$

- Heisenberg-Gl: Zeitentwicklung der Observablen:

$$\frac{d\hat{A}_h}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_h,\hat{H}_h] + \left(\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right)_h$$

  - $\left(\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right)_h = 0$, wenn $\hat{A}$ nicht explizit zeitabhängig ist
  - $\hat{A}$ ist eine Erhaltungsgröße, wenn $[\hat{A},\hat{H}] = 0$ und $\frac{\partial\hat{A}}{\partial t} = 0$

- Ehrenfest'sches Theorem:

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle[\hat{A},\hat{H}]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$