

Streuzustände in 1D

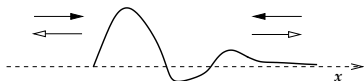
Asymptotische Lösungen:

für von $-\infty$ einfallende Teilchen:

$$\psi^{(-)}(x) = e^{ikx} + r_k e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty$$
$$t_\kappa e^{i\kappa x}, \quad x \rightarrow +\infty$$

für von $+\infty$ einfallende Teilchen:

$$\psi^{(+)}(x) = e^{-i\kappa x} + \tilde{r}_\kappa e^{i\kappa x}, \quad x \rightarrow +\infty$$
$$\tilde{t}_k e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty$$



Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{ein}}} \left(= \frac{\text{transmittierte Stromdichte}}{\text{einfallende Stromdichte}} \right)$$

$$T^{(-)} = \frac{\kappa}{k} |t_\kappa|^2; \quad T^{(+)} = \frac{k}{\kappa} |\tilde{t}_k|^2$$

Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{j_{\text{refl}}}{j_{\text{ein}}} = 1 - T \left(= \frac{\text{reflektierte Stromdichte}}{\text{einfallende Stromdichte}} \right)$$

$$R^{(-)} = |r_k|^2; \quad R^{(+)} = |\tilde{r}_\kappa|^2$$

Streumatrix: das Potential V sei auf einem endlichen Bereich definiert ($\kappa = k$)

$$\Psi_{\text{out}} = \hat{S} \Psi_{\text{in}}, \quad \Psi_{\text{in}} : \text{einfallende Wellenfunktion}$$

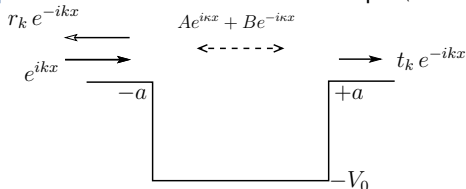
Ψ_{out} : ausgehende Wellenfunktion

$$S = \begin{pmatrix} t_k & \tilde{r}_\kappa \\ r_k & \tilde{t}_k \end{pmatrix}, \quad \|\Psi_{\text{in}}\| = \|\Psi_{\text{out}}\| \Leftrightarrow S : \text{unitär}$$

Resonanzen und Tunneleffekt

▶ Resonanzen

Beispiel: Streuzustände des Potentialtopfs (s. Seite 42) mit $E > 0$.



$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$
$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

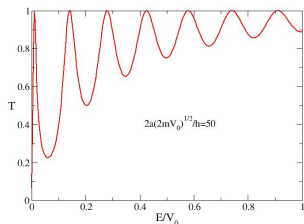
Transmissionskoeffizient:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa} \right)^2 \sin^2(2\kappa a)}$$

Reflexionskoeffizient: $R = 1 - T$

Resonanzen:

$T \rightarrow 1$, wenn $2\kappa a = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$



▶ Tunneleffekt

Beispiel: Potentialschwelle ($-V_0 \rightarrow +V_0$): $\kappa \rightarrow i\kappa$

Ladung im EM-Feld: Klassische Theorie

Bisher: Teilchen im Potential $V(x)$

Jetzt: Punktladung q in einem elektromagnetischen Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \Phi(\mathbf{x}, t)$$

Die Felder \mathbf{B} und \mathbf{E} sind invariant bei Potentialumreichung:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla \Lambda(\mathbf{x}, t) \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) &= \Phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\Lambda(\mathbf{x}, t)$

Newtonsche Bewegungsgl.:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

Hamilton-Bewegungsgl. (\Leftrightarrow Newtonsche Bewegungsgl.):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\text{mit} \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2}{2m} + q\Phi(\mathbf{x}, t)$$

Man unterscheidet: kanonischer Impuls: \mathbf{p}

kinetischer Impuls: $m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}$

Eichinvarianz der SchrödingerGl.

QM: HamiltonOp. für die WW einer Punktladung mit einem externen EM-Feld

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - (q/c)\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}, t))^2}{2m} + q\hat{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}, t)$$

Die dazugehörige SG.-Gl in der OrtsDarstellung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \underbrace{\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right)^2 + q\Phi(\mathbf{x}, t) \right]}_{\hat{H}} \psi(\mathbf{x}, t)$$

Kontinuitätsgl. für die Wahrscheinlichkeitsdichte: (vgl. Seite 31)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$$

$$\text{mit } \rho = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{j} = \frac{1}{m} \Re \left(\psi^* \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right] \psi \right)$$

Eichinvarianz:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla \Lambda(\mathbf{x}, t)$$

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

Lösung der umgeechten SG.Gl.: (Aufgabe)

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = e^{i \frac{q\Lambda}{\hbar c}} \psi(\mathbf{x}, t), \quad \rho = |\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t)|^2 = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2$$

Aharonov-Bohm-Effekt: Flussquantisierung

- Sei $\psi^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ die Lösung der SG.-Gl mit $\mathbf{A} = 0$.
- Wir betrachten ein \mathbf{B} -feldfreies Gebiet Ω : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$. Im Ω ist \mathbf{A} darstellbar durch $\mathbf{A} = \nabla \Lambda$ mit $\Lambda = \int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}$ (\int ein Wegintegral im Ω). Die Lösung der SG.-Gl mit $\mathbf{A} = \nabla \Lambda$:

$$\psi = \psi^{(0)} e^{i(q/\hbar c)\Lambda}$$

- Wegintegral über eine geschlossenen Kurve, die einen magnetischen Fluss ϕ_B umschließt:

$$\oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_f d\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \int_f d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = \phi_B \quad (*)$$

- Aharonov-Bohm-Interferenzexperiment mit Elektronen:

Im DoppelspaltExp. wird eine Spule mit $\mathbf{B} \neq 0$ zwischen die Spalte gebracht. Die Elektronen bewegen sich im Gebiet $\mathbf{B} = 0$.
Superposition der Wellenfunktionen:

$$\psi \propto \psi_1^{(0)} e^{i(q/\hbar c)\Lambda_1} + \psi_2^{(0)} e^{i(q/\hbar c)\Lambda_2}$$

here $\Lambda_i = \int_i d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}$ mit dem Integrationsweg i .

$$\xrightarrow{(*)} \psi \propto e^{i\delta} \left(\psi_1^{(0)} + \psi_2^{(0)} e^{i(q/\hbar c)\phi_B} \right)$$

Der relative Phasenfaktor $e^{i(q/\hbar c)\phi_B} = 1$ wenn $\phi_B = 2\pi n \hbar c / q$ mit $n \in \mathbb{Z}$ (Flussquantisierung).

Flusseinheit für $q = |e|$:

$$\phi_0 = \frac{2\pi \hbar c}{e} \approx 4.135 \times 10^{-7} \text{ G cm}^2$$

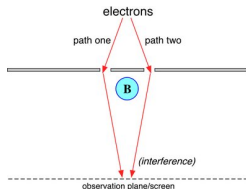


Fig: Wikipedia

Zusammengesetzte Systeme ***Einführung***

Bisher: Ein-Teilchen-Systeme ohne innere Freiheitsgrade: Punktteilchen, Punktladung

Im Folgenden werden wir Quantensysteme betrachten, die aus zwei (oder N) abgetrennten Teilsystemen zusammengesetzt sind: z.B. Teilchen mit Spin; Systeme mehrerer Teilchen etc.

In diesem Kapitel wird nur die mathematische Formulierung – Tensorprodukt eingeführt.

Tensorprodukt von Hilberträumen

Gegeben seien zwei Hilberträume \mathcal{H}_A und \mathcal{H}_B

ON-Basis für den N_A -dim. Raum \mathcal{H}_A : $\{|u_m\rangle, m = 1 \cdots N_A\}$

ON-Basis für den N_B -dim. Raum \mathcal{H}_B : $\{|v_n\rangle, n = 1 \cdots N_B\}$

Der Satz der $N_A N_B$ Vektoren

$$|u_m\rangle \otimes |v_n\rangle$$

bildet eine ON-Basis für den Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad |\psi\rangle = \sum_{m,n} \alpha_{mn} (|u_m\rangle \otimes |v_n\rangle) \quad \text{mit } \alpha_{mn} \in \mathbb{C}$$

Separabler Zustand (Produktzustand)

Gegeben seien $|\varphi_A\rangle = \sum_m \alpha_m |u_m\rangle \in \mathcal{H}_A$ und

$$|\varphi_B\rangle = \sum_n \beta_n |v_n\rangle \in \mathcal{H}_B \quad (\alpha_m, \beta_n \in \mathbb{C})$$

Der Produktzustand

$$|\psi\rangle = |\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle = \sum_m \sum_n \alpha_m \beta_n (|u_m\rangle \otimes |v_n\rangle)$$

heißt separabel.

Verschränkter Zustand

Ein Zustand in \mathcal{H} , der nicht als Produktzustand geschrieben werden kann, heißt *verschränkt*

Skalarprodukt

Für $|\varphi_A \varphi_B\rangle \equiv |\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$ und $|\psi_A \psi_B\rangle \equiv |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$

$$\langle \varphi_A \varphi_B | \psi_A \psi_B \rangle = \langle \varphi_A | \psi_A \rangle \langle \varphi_B | \psi_B \rangle$$