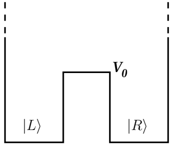
Beispiel

- Exkurs: Zweizustandssysteme (Aufgabe 22)

  Bsp: Das Doppelmulden-Potential beschreibt u.a. das Potential für das N-Atom in einem NH_3-Molekül



  - Wenn V_0 endlich ist, sind $|L\rangle$ und $|R\rangle$ keine stationäre Zustände.
  - Für $V_0 \gg 1$, können wir die zwei niedrigsten EnergieEV $|+\rangle \equiv (|R\rangle + |L\rangle)/\sqrt{2}$ und $|-\rangle \equiv (|R\rangle - |L\rangle)/\sqrt{2}$ isoliert betrachten.
- Raum eines Zweizustandssystems $\mathcal{H}_A$, aufgespannt von $\{|+_A\rangle, |-_A\rangle\}$
  Raum eines Zweizustandssystems $\mathcal{H}_B$, aufgespannt von $\{|+_B\rangle, |-_B\rangle\}$
  Produktraum von $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

  $|++\rangle \equiv |+_A\rangle \otimes |+_B\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ und $|--\rangle$ bilden eine Basis von $\mathcal{H}$
- Zustände in $\mathcal{H}$
  - $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle = \alpha_{11}|++\rangle + \alpha_{12}|+-\rangle + \alpha_{21}|-+\rangle + \alpha_{22}|++\rangle$$

  - Produktzustand (separabler Zustand)

$$\underbrace{\Big(\alpha_1|+_A\rangle + \alpha_2|-_A\rangle\Big)}_{\in\mathcal{H}_A} \otimes \underbrace{\Big(\beta_1|+_B\rangle + \beta_2|-_B\rangle\Big)}_{\in\mathcal{H}_B} \quad \in \mathcal{H}$$

  - Verschränkte Zustände

Bsp: $$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+-\rangle \pm |-+\rangle\Big)$$

Produktoperatoren im Produktraum

$\hat{A}$ sei ein linearer Operator auf $\mathcal{H}_A$ und $\hat{B}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}_B$. Das Tensorprodukt $\hat{A} \otimes \hat{B}$ wirkt "raumweis" auf den Zustand $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$

$$\left(\hat{A} \otimes \hat{B}\right)\left(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle\right) = |\hat{A}\psi_A\rangle \otimes |\hat{B}\psi_B\rangle$$

Matrixdarstellung bzgl. der Basis $|u_m v_n\rangle \equiv |u_m\rangle \otimes |v_n\rangle$

$$\langle u_{m'} v_{n'}|\hat{A} \otimes \hat{B}|u_m v_n\rangle = \langle u_{m'}|\hat{A}|u_m\rangle \langle v_{n'}|\hat{B}|v_n\rangle$$

- $\hat{A} \otimes \hat{I}_B$ wirkt nur auf $\mathcal{H}_A$
- $\hat{I}_A \otimes \hat{B}$ wirkt nur auf $\mathcal{H}_B$
- $[\hat{A} \otimes \hat{I}_B, \hat{I}_A \otimes \hat{B}] = 0$
- $(\hat{A}_1 \otimes \hat{B}_1)(\hat{A}_2 \otimes \hat{B}_2) = (\hat{A}_1 \hat{A}_2) \otimes (\hat{B}_1 \hat{B}_2)$
- Matrixdarstellung (via Kronecker-Produkt):

$$\hat{A} \doteq \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} +_A & -_A \end{array} \\ \begin{array}{c} +_A \\ -_A \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}, \quad \hat{B} \doteq \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} +_B & -_B \end{array} \\ \begin{array}{c} +_B \\ -_B \end{array} & \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\hat{A} \otimes \hat{B} \doteq \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & b \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ c \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & d \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ++ & +- & -+ & -- \end{array} \\ \begin{array}{c} ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{array} & \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix} \end{array}$$

Zwei-Teilchen-Systeme: Unterscheidbare Teilchen

Betrachtet wird ein 2-Teilchen-System, beschrieben durch den Hamilton-Op.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + V(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

- 1.Fall: $V(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = V_1(\hat{x}_1) + V_2(\hat{x}_2)$ (keine WW zw. 1 und 2)

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + V_1(\hat{x}_1)}_{\hat{H}_1 \equiv \hat{H}_1 \otimes \hat{I}_2} + \underbrace{\frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + V_2(\hat{x}_2)}_{\hat{H}_2 \equiv \hat{I}_1 \otimes \hat{H}_2} \qquad (\hat{H}: \text{ separabel})$$

EW-Problem:

Teilchen 1: $\hat{H}_1|v_1\rangle = E_1|v_1\rangle$

Teilchen 2: $\hat{H}_2|v_2\rangle = E_2|v_2\rangle$

$$\xrightarrow[{[\hat{H}_1, \hat{H}_2]=0}]{}$$

$\hat{H}|v_1, v_2\rangle = (E_1 + E_2)|v_1, v_2\rangle$

mit $|v_1, v_2\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle$

Zeitentwicklung: $|v_1(t), v_2(t)\rangle = |v_1\rangle e^{-itE_1/\hbar}|v_2\rangle e^{-itE_2/\hbar}$

In der x-Darstellung: EV von $\hat{H}$: $u(x_1, x_2) = v_1(x_1)v_2(x_2)$ (Separationsansatz)

$$u(x_1, x_2, t) = v_1(x_1)e^{-itE_1/\hbar}v_2(x_2)e^{-itE_2/\hbar}$$

Bemerkung: N-dim. System im kartesischen System
$\equiv$ N-Teilchen-System in 1D ohne WW

- 2.Fall: $V(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \neq V_1(\hat{x}_1) + V_2(\hat{x}_2)$ (wechselwirkende Teilchen)
Separationsansatz nicht direkt anwendbar