Abgabe: bis zum *18.Jan.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger

1 Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

1) Zeigen Sie, dass der Impuls $\mathbf{P}$ des elektromagnetischen Feldes in zweiter Quantisierung als

$$\mathbf{P} \equiv \frac{1}{4\pi c}\int d\mathbf{r}\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B} = \sum_{\mathbf{K},\alpha} \hbar \mathbf{K} a^\dagger_{\mathbf{K}\alpha} a_{\mathbf{K}\alpha} \tag{12.1}$$

geschrieben werden kann.

2) Zeigen Sie, dass sich der Spinbeitrag $\mathbf{J}_{\text{spin}}$ des Gesamtdrehimpulses in zweiter Quantisierung als

$$\mathbf{J}_{\text{spin}} \equiv \frac{1}{4\pi c}\int d\mathbf{r}\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{K}} \hbar \frac{\mathbf{K}}{K}\left(a^\dagger_{\mathbf{K}+} a_{\mathbf{K}+} - a^\dagger_{\mathbf{K}-} a_{\mathbf{K}-}\right) \tag{12.2}$$

schreiben lässt, mit $a_{\mathbf{K}\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{K}1} \pm i a_{\mathbf{K}2})$.

2 Klein-Gordon Gleichung

Zur Vereinfachung der Terme sei $\hbar = c = 1$.

Gegeben sei folgender Lagragian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)\cdot(\partial\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{12.3}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - (\partial_i\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{12.4}$$

mit $i = x, y, z$.

1) Bestimmen Sie mittels Euler-Lagrangeformalismus die Klein-Gordon Gleichungen

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = 0. \tag{12.5}$$

2) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von (12.5) folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi^+(x) + \phi^-(x) \\ \phi^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_k} A_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot x - \omega_k t)} \\ \phi^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_k} A_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot x + \omega_k t)}\end{aligned} \tag{12.6}$$

mit $A_\pm(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}, \pm\omega_k)$ und der Dispersionsrelation $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ für jede Funktion $A(\mathbf{k}, \omega_k)$.

3) Der Klein-Gordon Strom ist definiert durch

$$j^\mu(x) = \frac{i}{2m}\left(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - (\partial^\mu\phi^*)(x)\phi(x)\right). \tag{12.7}$$

Zeigen Sie, dass der Klein-Gordon Strom die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{12.8}$$

erfüllt.

4) Wir definieren die Wahrscheinlichkeitsdichte als die 0-Komponente des Stroms (12.7)

$$\rho = \int d\mathbf{x} \frac{i}{2m} \left(\phi^*(x)\dot{\phi}(x) - \phi(x)\dot{\phi}^*(x) \right). \tag{12.9}$$

Zeigen Sie, dass

$$\rho = \rho^+ + \rho^- \tag{12.10}$$

$$\rho^\pm = \pm \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_k} \, |A_\pm(\mathbf{k})| \tag{12.11}$$

Diskutieren Sie das Vorzeichen der Verteilung für Lösungen mit negativer und positiver Energie.

3 Nullpunktsenerige und Casimir-Effect.

Die Nullpunktsenergie des Vakuums $\sum_k \frac{1}{2}\hbar\omega_k$ wird üblicherweise als nicht messbarer (unendlicher) Shift der Null auf der Energieskala betrachtet. Dennoch entdeckte Casimir im Jahre 1948 *Differenzen* dieser Nullpunktsenergien des Vakuums. Im Folgenden wird der Casimir-Effekt untersucht, der eine Kraft zwischen leitenden Platten beschreibt. Diese Kraft wird durch eine solche Änderung der Nullpunktsenergien erzeugt, welche Folge der durch die Platten gegebenen Randbedingungen ist.

3.1 Casimir-Effect in einer Dimension

Betrachten Sie die Moden eines freien, masselosen skalaren Feldes in einer räumlichen Dimension innerhalb einer Strecke L. Es gelten die Randbedingungen $\phi(x=0) = \phi(x=L) = 0$. Daher sind die erlaubten Terme innerhalb einer Fourierdarstellung gegeben durch $\sin k_n x$, mit $k_n = n\pi/L$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Die Energiedichte des Vakuums ist dabei unendlich, analog zur 3-d Feldtheorie. Um dieses Problem zu beheben, führen wir einen *Cut-off*-Faktor $\propto e^{-\omega_n/\omega_c}$ ein, welcher die Vakuumenergie endlich werden lässt. Nach der Berechnung der relevanten Energiedifferenzeen ist es möglich den Grenzwert $\omega_c \to 0$ zu betrachten. Die Nullpunktsenergie innerhalb der Box ist gegeben durch

$$E_0(L) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n e^{-\omega_n/\omega_c} \quad , \quad \omega_n = n\pi/L \tag{12.12}$$

1) Zeigen Sie für $E_0(L)$:

$$E_0(L) = \frac{\pi}{8L} \frac{1}{\sinh^2 \pi/(2\omega_c L)}. \tag{12.13}$$

2) Zeigen Sie für den Fall $\omega_c \to \infty$:

$$E_0(L) = \frac{L\omega_c^2}{2\pi} - \frac{\pi}{24L} + \mathcal{O}(\omega_c^{-2}). \tag{12.14}$$

3) Jetzt führen wir zwei metallische, unendlich dünne “Trennwände” in unser System an den Positionen $\frac{L}{2} \pm \frac{a}{2}$, $(a < L)$ ein. Zeigen Sie, dass sich für die totale Nullpunktsenergie $E^{\text{total}}(a)$ Folgendes ergibt:

$$E^{\text{total}}(a) = E_0(a) + 2E_0\left(\frac{L-a}{2}\right). \tag{12.15}$$

4) Die Kraft zwischenden Platten kann berechnet werden durch $\partial E^{\text{total}}(a)/\partial a$. Berechnen Sie diese für $\omega_c \to \infty$ und $L \to \infty$ und gegeben Sie an, ob es sich um eine attraktive oder eine repulsive Kraft handelt.

3.2 Casimir-Effekt

In diesem Abschnitt berechnen wir die Kraft zwischen zwei metallischen Platten im elektrodynamischen Vakuum. Die (klassischen) Moden in einer perfekt leitenden Box der Größe $a \times b \times c$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} A_x &= \epsilon_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ A_y &= \epsilon_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ A_z &= \epsilon_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z), \end{aligned} \tag{12.16}$$

mit diskreten $k_x = \pi n_x/a, k_y = \pi n_y/b, k_z = \pi n_z/c$ ($n_i \in \mathbb{N}$) und einem Polarisationsvektor $\vec{\epsilon}$, der $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$ erfüllt. Zusätzlich gilt an den Rändern der Box: $E_\parallel = 0$, $B_\perp = 0$.
1.1) Zeigen Sie, dass es im Falle $n_i \neq 0$ $\forall i$ zwei erlaubte Moden gibt.
1.2) Zeigen Sie, dass es im Falle genau einer n-Komponente gleich Null eine erlaubte Moden gibt.
1.3) Zeigen Sie, dass es im Falle mindestens zweier n-Komponenten gleich Null keine erlaubten Moden gibt.

Hinweis für 1.2: Zeigen Sie, dass eine der Möglichkeiten aus 1.1 nicht die Bedingung für $E_\parallel$ am Rand erfüllt.

2) Zeigen Sie ausgehend von der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, dass die Nullpunktsenergie $E_0(a,b,c)$, welche durch eine Cut-off-Funktion $F(k)$ (analog zu $e^{-\omega_n/\omega_c}$ im ersten Teil) begrenzt wird, gegeben ist durch

$$\begin{aligned} E_0(a,b,c) = \frac{1}{2} \sum_{n_x,n_y=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2+k_y^2} F(\sqrt{k_x^2+k_y^2}) + (k_x,k_y \to k_y,k_z) \\ +(k_x,k_y \to k_x,k_z) + \sum_{n_x,n_y,n_z=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} F(\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}). \end{aligned} \tag{12.17}$$

Wir wollen annehmen, dass $F(k) = 1$ unterhalb eines Cutoffwertes K_c und oberhalb hinreichend schnell gegen 0 konvergiert, so dass die Summen endliche Werte haben.

3) Jetzt wollen wir einen großen Würfel mit Kantenlänge L annehmen, der in z-Richtung durch zwei zur x-y Ebene parallele, leitende Platten mit den z-Komponenten $\frac{L}{2} \pm \frac{a}{2}$, ($a \ll L$) geteilt wird. Für große L kann man die Vakuumsenergie berechnen, indem man k_x, k_y als kontinuierlich annimmt. Nur k_z muß über alle erlaubten diskreten Werte summiert werden. Zeigen Sie mit der Definition $k^2 := k_x^2 + k_y^2$, dass

$$E_0(a,L,L) = \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk_x dk_y \left[\frac{1}{2} k F(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} F\left(\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \right) \right] \tag{12.18}$$

$$= \frac{L^2}{4\pi} \int dk k^2 F(k) + \frac{\pi^2 L^2}{4a^3} \sum_{n=1}^{\infty} G(n), \tag{12.19}$$

mit

$$G(n) = \int_{n^2}^{\infty} dy \sqrt{y} F\left(\frac{\pi \sqrt{y}}{a} \right). \tag{12.20}$$

4) Nutzen Sie dieEuler-MacLaurin-Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} G(n) = \int_0^\infty dn G(n) - \frac{1}{2} G(0) - \frac{B_2}{2!} G'(0) - \frac{B_4}{4!} G'''(0) + ..., \tag{12.21}$$

wobei B_n die Bernoullizahlen bezeichnet. Zeigen Sie mit $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -1/30$, dass

$$E_0(a, L, L) = L^2 \left[c_1 a + c_2 - \frac{\pi^2}{720 a^3} \right] . \tag{12.22}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass alle Ableitungen $d^k G(n)/dn^k$ bei $n = 0$, verschwinden,falls $k > 3$.

5) Berechnen Sie die totale Energie

$$E^{\text{total}}(a) = E_0(a, L, L) + 2E_0 \left(\frac{L-a}{2}, L, L \right) \tag{12.23}$$

um zu zeigen, dass der attraktive Druck zwischen den Klatten gegeben ist durch

$$P = \frac{\pi^2}{240 a^4} \tag{12.24}$$

Anmerkung : Experimentell konnte diese winzige Kraft erstmals 1958 von Sparnay nachgewiesen werden.