Abgabe: bis zum *25.Jan.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger

1 Kanonische Quantisierung des freien Dirac-Feldes

Der Lagrangian von Dirac-Teilchen ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_D(\psi) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \tag{13.1}$$

wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, ψ einen 4-komponentigen Dirac-Spinor darstellt.

a) Zeigen Sie, dass die zu $\mathcal{L}_D$ gehörigen Bewegungsgleichungen die Diracgleichung und ihre hermitisch konjugierte sind:

$$\begin{aligned} &(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \\ &-i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0. \end{aligned} \tag{13.2}$$

b) Berechnen Sie den Impuls $\pi_\alpha^\psi(x) = \partial\mathcal{L}_D/(\partial_0\psi_\alpha(x))$ und zeigen Sie, dass er das kanonische konjugierte von ψ_α ist, also

$$\pi_\alpha^\psi(x) = i\psi_\alpha^\dagger. \tag{13.3}$$

Die Hamiltondichte ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_D = \pi^{\psi,\alpha}\partial_0\psi_\alpha - \mathcal{L}_D. \tag{13.4}$$

c) Zeigen Sie, dass $H = \int d^3x \mathcal{H}_D = \int d^3x i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi$.
d) Gegeben sei folgender Ausdruck für das Dirac-Feld ψ:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2k_0}} \sum_{\sigma=1,2} [b_\sigma(\vec{k})u^\sigma(k)e^{-ik.x} + d_\sigma^\dagger(\vec{k})v^\sigma(k)e^{ik.x}]. \tag{13.5}$$

wobei u^σ, v^σ Dirac-Spinoren mit Normierung

$$\begin{aligned} \bar{u}^\sigma(k)u^\nu(k) &= \delta_{\sigma\nu} \\ \bar{v}^\sigma(k)v^\nu(k) &= -\delta_{\sigma\nu} \\ \bar{u}^\sigma(k)v^\nu(k) &= 0 \end{aligned} \tag{13.6}$$

sind und $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$, $\bar{v} = v^\dagger\gamma^0$. Erklären Sie kurz, warum das die allgemeine Lösung von (13.2) ist und berechnen Sie k_0, so dass $\psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der Diracgleichung ist.

e) Nutzen Sie den Ausdruck für $\psi(x)$ (13.5) um Folgendes zu zeigen:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \sum_{\sigma=1,2} [b_\sigma^\dagger(\vec{k})b_\sigma(\vec{k}) - d_\sigma(\vec{k})d_\sigma^\dagger(\vec{k})] \tag{13.7}$$

und berechnen Sie ω_k.
Hinweis : Um den Ausdruck für H zu vereinfachen, zeigen Sie, dass falls $u(k)$ eine Lösung ist, auch $\gamma^0 u(k)$ eine Lösung mit $\vec{k} \to -\vec{k}$ darstellt. Daher:

$$\gamma^0 u_\sigma(k_0, \vec{k}) = u_\sigma(k_0, -\vec{k}). \tag{13.8}$$

Selbiges gilt für $v_\sigma(k_0, \vec{k}) = \gamma^0 v_\sigma(k_0, -\vec{k})$. Zusätzlich ist folgende Relation nützlich:

$$\bar{u}_\sigma(k)\gamma^\mu u_\nu(k) = \bar{v}_\sigma(k)\gamma^\mu v_\nu(k) = 2k^\mu \delta_{\sigma\nu}. \tag{13.9}$$

f) Rechtfertigen Sie ausgehend von dem Ausdruck (13.7) für H die Wahl folgender *Antikommutatorregeln*

$$\{b_\sigma(\vec{k}), b_\nu^\dagger(\vec{k}')\} = \{d_\sigma(\vec{k}), d_\nu^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{\sigma\nu}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \tag{13.10}$$

alle anderen Antikommutatoren verschwinden. Zeigen Sie, dass obige Antikommutatorregeln die Antikommutatorregeln des Feldoperators implizieren:

$$\begin{aligned} &\{\psi(\vec{x}, t), \bar{\psi}(\vec{x}', t)\} = \gamma_0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ &\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\} = 0. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Hinweis : Nutzen Sie:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1,2} u^\sigma(k)\bar{u}^\sigma(k) &= \gamma^\mu k_\mu + m \\ \sum_{\sigma=1,2} v^\sigma(k)\bar{v}^\sigma(k) &= \gamma^\mu k_\mu - m \end{aligned} \tag{13.12}$$

g) Zeigen Sie abschließend, dass

$$H =: H : + E_0, \tag{13.13}$$

wobei E_0 eine zu bestimmende (unendliche) Konstante bezeichnet.

2 Klein's Paradoxon für Spin $1/2$ Teilchen

Gegeben sei ein Elektron der Masse m in einem äußeren elektromagnetischen Feld A^μ, welches folglich die Diracgleichung erfüllen muss (Die Kopplung des Feldes wird mittels *minimaler Ankopplung* berücksichtigt.):

$$[-i\gamma_\mu(\partial^\mu + ie\frac{A^\mu}{c}) + mc]\psi = 0. \tag{13.14}$$

Wir betrachten hier den Fall, dass $A^\mu = (\Phi, \vec{0})$ mit $\Phi \equiv \Phi(z)$. Das elektrische Potential sei $V(z) = e\Phi(z)$ mit

$$\Phi(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \quad I \\ V_0 & z > 0 \quad II. \end{cases} \tag{13.15}$$

Gegeben sei weiter ein Elektron mit Spin $\uparrow$, Energie E und Impuls $\vec{p} = p_z\vec{z}$. Es wird durch einen 4-komponentigen Dirac-Spinor $\psi(\vec{x}, t) = \theta(-z)\psi_I(\vec{x}, t) + \theta(z)\psi_{II}(\vec{x}, t)$ beschrieben (mit $\theta(x) = 1$ falls $x > 0$ und $\theta(x) = 0$ falls $x < 0$), welcher eine Lösung der Gleichung (13.14) sei. Ψ_I sei die Summe der einlaufenden Wellen ψ_{in} und der reflektierten Welle ψ_{refl}, ψ_{II} sei die transmittierte Welle ψ_{trans}.
a) Formulieren Sie die Diracgleichung (13.14) für die Bereiche I und II.

Nehmen sie eine von $z < 0$ nach rechts einfallende freie Elektronenwelle der Energie $E > 0$ an. Ihr Impuls lässt sich daher schreiben als $\vec{p} = p\vec{z}$, mit $p > 0$. Lösen Sie das Problem in den folgenden Schritten
b) Formulieren Sie die Wellenfunktion ψ_{in} der einfallenden Welle.
c) Machen Sie folgenden Ansatz für die reflektierte Welle $\psi_{refl} = e^{-iEt}[be^{-ipz}u_1 + b'e^{-ipz}u_2]$, wobei u_1, u_2 zu bestimmende Dirac-Spinoren darstellen. Rechtfertigen und interpretieren Sie den Ansatz.
d) Berechnen Sie für die transmittierte Welle $\psi_{trans} = e^{-iEt}[de^{ip'z}u_3 + d'e^{ip'z}u_4]$, den Impuls p' sowie die Dirac-Spinoren u_3, u_4. Rechtfertigen Sie auch diesen Ansatz.

e) Warum muss ψ an der Stelle $z = 0$ stetig sein? Berechnen Sie die Faktoren b, b', d, d' und zeigen Sie, dass es zu keinem Spinflip kommt. Der Teilchenstrom ist gegeben durch $\vec{j} = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$.

f) Zeigen Sie für die Ströme:

$$R = \frac{j_{refl}}{j_{in}} = \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} \quad , \quad T = \frac{j_{trans}}{j_i} = \frac{4r}{(1-r)^2}$$

$$r = \frac{p'}{p}\frac{E + mc^2}{E - V_0 + mc^2}. \tag{13.16}$$

$$\tag{13.17}$$

g) Wir beschränken uns auf den Fall $V_0 > E + mc^2$ (starkes Feld). Diskutieren Sie das Verhalten der Stromdichte. Zeigen Sie, dass die Lösungsterme als Erzeugung eines Teilchen-Antiteilchen Paares interpretiert weren kann.

3 Nichtrelativistischer Grenzfall der Diracgleichung

Wegen Konsistenz sollte sich die Diracgleichung im nichtrelativistischen Grenzfall auf die aus der nichtrelativistischen QM bekannte Pauli-Schrödinger-Gleichung reduzieren. Wir untersuchen diesen Grenzfall für ein Diracteilchen positiver Energie in einem elektromagnetischen Potential.

Die Diracgleichung mit elektromagnetischem Feld $A_\mu = (A_0, \vec{A})$ ist durch (13.14) gegeben.

1) Zeigen Sie durch Multiplizieren eines geeigneten Termes von links, dass gilt:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[c\alpha\cdot(\vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}) + eA_0 + \beta mc^2\right]\psi, \tag{13.18}$$

mit $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$ and $\beta = \gamma_0$.
Nehmen Sie folgende 2-komponentige Darstelllung des Spinors ψ an:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{13.19}$$

2) Nutzen Sie die Diracdarstellung von γ um die Gleichungen für die 2-komponentigen Spinoren ϕ und χ erzuleiten.

Falls der Ruheenergieterm mc^2 der größte ist, so ist eine approximative Lösung durch

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar} \tag{13.20}$$

gegeben, wobei ϕ_0, χ_0 nur langsam variierende Funktionen darstellen.

3) Zeigen Sie für den Fall sehr kleiner kinetischer Energie $|i\hbar\dot{\chi}_0| \ll |mc^2\chi_0|$ und eines schwachen elektrischen Potentials verglichen mit mc^2 ($|eA_0\chi_0| \ll |mc^2\chi_0|$), dass die Gleichung für χ_0 gegeben ist durch

$$0 \simeq c\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\phi_0 - 2mc^2\chi_0. \tag{13.21}$$

4) Zeigen Sie weiter, dass die Gleichung für ϕ_0 in diesem nichtrelativistischen Fall folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$i\hbar\dot{\phi}_0 = \frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}))^2\phi_0 + eA_0\phi_0. \tag{13.22}$$

5) Vereinfachen Sie den letzten Ausdruck um die Pauli-Schrödinger zu erhalten:

$$i\hbar\dot{\phi}_0 = \left[\frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA_0\right]\phi_0. \tag{13.23}$$

Hinweis : Nutzen Sie folgende Identitäten

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{13.24}$$

$$\nabla \times \vec{A}\psi + \vec{A} \times (\nabla\psi) = (\nabla \times \vec{A})\psi \quad \forall\psi$$