1 Reelle Gauß-Integrale

Gauß-Integrale spielen eine wichtige Rolle innerhalb des Pfadintegralformalismus. Allgemein bilden sie ein wichtiges Werkzeug der störungstheoretischen Analyse in der Quanten- und Statistischen Feld-Theorie.
Wichtige Grundlage aller Gauß-Integrale ist dabei die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad , \quad \mathrm{Re}\,(a) > 0 \tag{1.1}$$

1) Gegeben sei $P(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}x^2}$, weiter bezeichne für jede Funktion $Q(x)$:

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx Q(x) P(x). \tag{1.2}$$

Wir definieren $Z(j) = \langle e^{jx} \rangle$.
Zeigen Sie folgende Identität: $\langle x^2 \rangle = Z''(0)$,
dabei wird $Z(j)$ als Erzeugende von $P(x)$ bezeichnet.

Berechnen Sie außerdem noch $Z(j)$ und $\langle x^2 \rangle$.

2) Gegeben sei eine positiv definite, reelle, symmetrische N-dimensionale Matrix $\mathbf{A} \equiv A_{ij}$ und ein N-komponentiger reeller Vektor $\mathbf{v} \equiv (v_1, .., v_N)$.
a) Zeigen Sie die Verallgemeinerung von (1.1) für N Dimensionen:

$$\int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}} = (2\pi)^{N/2} \det \mathbf{A}^{-1/2}, \tag{1.3}$$

mit $\int d\mathbf{v} \equiv \Pi_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dv_i$ und $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \sum_{i,j} v_i A_{ij} v_j$.
Hinweis : $\mathbf{A}$ kann durch orthogonale Transformationen diagonalisiert werden
b) Analog zum vorherigen $1d$ Fall führen wir die Größen $P(\mathbf{v})$ und $Z(\mathbf{j})$ ein:

$$P(\mathbf{v}) = (2\pi)^{-N/2} \det \mathbf{A}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}} \tag{1.4}$$

$$Z(\mathbf{j}) = \langle e^{\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}} \rangle \tag{1.5}$$

dabei bezeichnet $\langle .. \rangle$ jetzt eine Mittelung mit $P(\mathbf{v})$ und $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v} = \sum_i j_i v_i$. Zeigen Sie die Relation:

$$\langle v_m v_n \rangle = A^{-1}_{mn}. \tag{1.6}$$

Hinweis : Berechnen Sie $Z(\mathbf{j})$.
3) Jetzt betrachten wir die kontinuierliche Version von (1.3). Der Vektor $\mathbf{v} \equiv v_i$ wird dann zu einem *Feld* $v(x)$, und die Matrix A_{ij} wird ein Propagator, bzw. eine 2-Punkt Greens-Funktion $A(x, x')$. Gl.(1.3) verändert sich dann zu

$$\int D v e^{-\frac{1}{2}\int_{x,x'} v(x) A(x,x') v(x')} \propto (\det A)^{-1/2}. \tag{1.7}$$

Geben Sie ohne Berechnung die Verallgemeinerung von (1.6) $\langle v(x) v(x') \rangle$ an, wobei die Mittelung $\langle .. \rangle$ jetzt mit $P(v)$ berechnet wird.

2 Harmonischer Oszillator.

Gegeben sei der $1d$ quantenmechanische Oszillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{1.8}$$

$$V(q) = \frac{m\omega^2}{2} q^2. \tag{1.9}$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude $U(f,i) \equiv U(q_f,t_f|q_i,t_i)$ das Teilchen am Ort q_f zur Zeit t_f zu finden, unter der Bedingung, dass es zur Zeit t_i bei q_i war, lässt sich berechnen mit:

$$U(f,i) = \langle q_f| e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f - t_a)} |q_i\rangle \tag{1.10}$$

Diese Amplitude $U(f,i)$ kann mit Hilfe des Pfadintegralformalismus berechnet werden:

$$U(f,i) = \lim_{N\to\infty} \int dq_N ... dq_1 \frac{1}{(2\pi i \hbar m^{-1}\epsilon)^{(N+1)/2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right)^2 - V(q_k), \right) \epsilon \right) \tag{1.11}$$

mit $\epsilon = (t_f - t_i)/(N+1)$. Für den kontinuierlichen Grenzwert $N \to \infty$ nutzt man die Notation:

$$U(f,i) = \int_{q_f}^{q_i} Dq(t) e^{\frac{i}{\hbar}S[q(t)]}$$

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right). \tag{1.12}$$

Obwohl $U(f,i)$ in der Form (1.12) für den harmonischen Oszillator mit Hilfe von (1.7) bereits berechnet werden kann, wollen wir hier die eine diskrete Näherung nach (1.11) durchführen und erst am Ende den Grenzwert $N \to \infty$ bilden.
1) Bestimmen Sie den klasischen Pfad $\bar{q}(t)$ für den Fall des harmonischen Oszillator (1.8).
2) Benutzen Sie (1.12) um Folgendes zu zeigen (Randbedingungen beachten):

$$U(f,i) = e^{\frac{i}{\hbar}S_c} \int_{y(t_i)=0}^{y(t_f)=0} Dy(t) \exp \frac{i}{\hbar} \left(\int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{m\omega^2}{2} y^2 \right) \right) \tag{1.13}$$

$$S_c = S[\bar{q}(t)], \tag{1.14}$$

mit $q = \bar{q} + y$.
3) Zeigen Sie unter Verwendung der diskreten Definition des verbleibenden Pfadintegrals in (1.13), dass

$$U(f,i) = e^{\frac{i}{\hbar}S_c} U_1(t_f,t_i) \tag{1.15}$$

$$U_1(t_f,t_i) = \lim_{N\to\infty} \int dy_N ... dy_1 \frac{1}{(2\pi i\hbar m^{-1}\epsilon)^{(N+1)/2}} e^{-\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}, \tag{1.16}$$

mit $\mathbf{y} \equiv (y_1, .., y_N)$ und $\mathbf{A}$ eine Matrix in der Form

$$\mathbf{A} = \frac{m}{2\epsilon\hbar i} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{i\epsilon m\omega^2}{2\hbar} \mathbb{I}, \tag{1.17}$$

wobei $\mathbb{I} \equiv \delta_{ij}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.
4) Verifizieren Sie die Relation

$$U_1(t_f,t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar m^{-1} f(t_f,t_i)}} \tag{1.18}$$

$$f(t_f,t_i) = \epsilon \lim_{N\to\infty} P_N \quad , \quad P_N = (2i\hbar m^{-1}\epsilon)^N \det \mathbf{A} \tag{1.19}$$

5) Zur Berechnung der Determinante in P_N, zeigen Sie die Rekursionsrelation

$$\frac{P_{k+1} - 2P_k + P_{k-1}}{\epsilon^2} = -\omega^2 P_k \tag{1.20}$$

Zeigen Sie weiter, dass im Grenzwert $\epsilon \to 0$ die Gleichung für $\varphi(t) = \epsilon P_k$ (mit $t = t_i + k\epsilon$) zu folgendem führt:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \tag{1.21}$$

mit den Randbedingungen

$$\varphi(t_i) = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}(t_i) = 1 \tag{1.22}$$

6)Nutzen Sie $\varphi(t) = f(t, t_i)$ um das finale Ergebnis zu zeigen:

$$U(f,i) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega t)}\left((q_i^2 + q_f^2)\cos(\omega t) - 2q_i q_f\right)}}{\sqrt{2\pi i\hbar m^{-1}\omega^{-1}\sin(\omega t)}} \tag{1.23}$$

mit $t = t_f - t_i$.

3 Wiederholung: Lagrange Formalismus

Ein Seil der Länge a, Massenlängendichte σ und Spannung T ist an beiden Enden fixiert. Die Lagrangefunktion der transversalen Auslenkung $y(x,t)$ ist gegeben durch:

$$L = \int_0^a dx \left[\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{1.24}$$

Dabei bezeichnet x die Position entlang des Seile, bei einem Endpunkt beginnend. Ersetzen Sie $y(x,t)$ in (1.24) durch den Fourieransatz

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

und zeigen, dass gilt:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\sigma\dot{q_n}^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 q_n^2\right]. \tag{1.25}$$

Nutzen Sie für (1.25) das Variationsprinzip um die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_n}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \tag{1.26}$$

zu verifizieren.
Zeigen Sie abschließend, dass das Problem des Seils äquivalent ist zu dem Problem unendlich vieler harmonischer Oszillatoren mit Frequenz $\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\left(\frac{n\pi}{a}\right)$.