Abgabe: bis zum *26.Okt.2008, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger

1 allgemeiner Propargator

Gegeben sei folgende Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}c(t)q^2$.
Zeigen Sie, dass der Propargator $K(q, t; q_0, t_0)$ in diesem Fall folgendermaßen approximiert werden kann:

$$K(q, t; q_0, t_0) \simeq \frac{1}{(2\pi i\varepsilon)^{\frac{N+1}{2}}} \int \prod_{r=1}^{N} dq_r \; e^{iS[q]}, \tag{2.1}$$

mit

$$S[q] = \sum_{r=0}^{N} \left(\frac{1}{2}(q_{r+1} - q_r)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon c_r q_r^2 \right), \tag{2.2}$$

sowie $q_{N+1} = q$, $t - t_0 = T = (N + 1)\,\varepsilon$ und $c_r = c(t_r)$ für $t_r = t_0 + r\varepsilon$.
Nehmen Sie nun an, dass Q_r (mit $Q_0 = q_0$, $Q_{N+1} = q$) Lösung der Gleichung $\frac{\partial S[q]}{\partial q_r} = 0$ für $r = 1, \ldots, N$ ist.
Sei $q = Q + f$ mit $f_0 = f_{N+1} = 0$. Zeigen Sie, dass:

$$S[q] = S[Q] + S[f], \tag{2.3}$$

wobei $S[f] = \frac{1}{2}\sum_{r,s} f_r A_{N,rs} f_s$ and $A^{(N)}$ eine N x N Matrix folgender Gestalt ist:

$$\begin{pmatrix} 2-\varepsilon^2 c_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2-\varepsilon^2 c_2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\varepsilon^2 c_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2-\varepsilon^2 c_{N-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2-\varepsilon^2 c_N \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie abschließend:

$$K(q, t; q_0, t_0) \simeq \frac{1}{\left(2\pi i\varepsilon \det A^{(N)}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{iS[Q]}. \tag{2.4}$$

2 Operatoridentitäten

1) X, Y, Z seien drei lineare Operatoren. Der Kommutator zweier Operatoren ist definiert durch: $[X, Y] := XY - YX$. Zeigen Sie folgende Identität:

$$[XY, Z] = X[Y, Z] + [X, Z]Y. \tag{2.5}$$

2) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Gl.(2.5) folgende Relation:

$$[X, Y^n] = \sum_{k=1}^{n} Y^{n-k}[X, Y]Y^{k-1}. \tag{2.6}$$

3) Gegeben seien die beiden konjugierten Operatoren $b^\dagger$ (Erzeuger), b (Vernichter) mit folgender Kommutatorrelation:

$$[b, b^\dagger] = bb^\dagger - b^\dagger b = 1, \tag{2.7}$$

1 bezeichnet dabei den Identitätsoperator des zugehörigen Fockraumes. Weiter seien eine analytische Funktion f sowie zwei komplexe Zahlen α, β gegeben. Zeigen Sie folgende Relationen:

$$\begin{array}{ll}
a) & [b, f(b^\dagger)] = \dfrac{\partial f(b^\dagger)}{\partial b^\dagger} \\
b) & [b^\dagger, f(b)] = -\dfrac{\partial f(b)}{\partial b} \\
c) & e^{-\alpha b^\dagger} b e^{\alpha b^\dagger} = b + \alpha \\
d) & e^{-\alpha b} b^\dagger e^{\alpha b} = b^\dagger - \alpha \\
e) & e^{-\alpha b^\dagger} e^{\beta b} e^{\alpha b^\dagger} = e^{\beta b} e^{\alpha \beta} \\
f) & U = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha b^\dagger} e^{-\alpha^* b} \quad \text{ist ein unitärer Operator} \\
g) & U^\dagger b U = b + \alpha \\
h) & U^\dagger b^\dagger U = b^\dagger + \alpha^*
\end{array}$$

Hinweis : Campbell-Hausdorff Formel $e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]}$.

3 Harmonischer Oszillator in einer Dimension : Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Gegeben sei der Hamiltonoperaotr des harmonischen Osszillators mit Masse m und Frequenz ω_0:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2. \tag{2.8}$$

a) Wir führen die dimensionslosen Größen π und ξ ein:

$$p = -ip_0 \partial_\xi = p_0 \pi \quad , \quad x = x_0 \xi. \tag{2.9}$$

Bestimmen Sie p_0, x_0, so dass

$$H = \frac{\hbar \omega_0}{2} (\pi^2 + \xi^2). \tag{2.10}$$

b) Weiter führen wir den Operator $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi - i\xi)$ ein. Bestimmen Sie dessen konjugierten Operator $a^\dagger$, definiert durch:

$$(a^\dagger f|g) = (f|ag), \tag{2.11}$$

mit dem Skalarprodukt $(f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f^*(\xi) g(\xi)$.

c) Zeigen Sie, dass H als Funktion des Operators $N = a^\dagger a$ folgende Gestalt hat:

$$H = \hbar \omega_0 \left(N + \frac{1}{2} \right). \tag{2.12}$$

d) Zeigen Sie folgende Kommutatorrelationen:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad , \quad [N, a] = -a \quad , \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger. \tag{2.13}$$

e) Nutzen Sie (2.13) um die Eigenwerte von $N(H)$ zu bestimmen.

Hinweis : $||a\psi||^2 \geq 0 \; \forall \; \psi$. Welches Resultat erhält man nach Anwenden der Operatoren $a, a^\dagger$ auf die Eigenvektoren von H?

f) Zeigen Sie, dass die zugehörigen normierten Eigenvektoren ψ_n als Funktion des Erzeugungsoperators $a^\dagger$ gegeben sind durch:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^\dagger\right)^n \psi_0, \tag{2.14}$$

mit Grundzustand ψ_0, so dass $a\psi_0 = 0$.