7. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

Abgabe: bis zum *30.Nov.2009, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger

1 Quantisierung von Feldern: das Yukawa-Potential

Gegeben sei ein System von Fermionen, erzeugt durch das Feld $\psi^\dagger(\mathbf{r})$, welches durch das Yukawa-Potential

$$V(\mathbf{r}) \equiv V(r) = A\frac{e^{-\lambda r}}{4\pi r} \tag{7.1}$$

wechselwirkt, mit $r = |\mathbf{r}|$.

1) Schreiben Sie den Hamiltonoperator in Ortsdarstellung in zweiter Quantisierung.
2) Schreiben Sie den Hamiltonoperator in Impulsdarstellung in zweiter Quantisierung, mit

$$c_{\mathbf{k}}^\dagger = \int d^3\mathbf{r}\psi^\dagger(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{7.2}$$

Hinweis: Es ist nützlich, folgende Fourierdarstellung des Potentials zuerst zu zeigen und dann zu nutzen:

$$V(r) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\frac{A}{q^2+\lambda^2}. \tag{7.3}$$

2 Spinoperatoren in zweiter Quantisierung

2.1 Fermionische Systeme

Zeigen Sie, dass der Spinoperator $\overrightarrow{S}$ in folgender Weise als Funktion fermionischer Erzeuger $c_\sigma^\dagger$ und Vernichter c_σ ($\sigma =\uparrow,\downarrow$) mit $\{c_\sigma, c_{\sigma'}^\dagger\} = \delta_{\sigma,\sigma'}$ geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} S^x &= \frac{1}{2}\left(c_\uparrow^\dagger c_\downarrow + c_\downarrow^\dagger c_\uparrow\right) \\ S^y &= -\frac{i}{2}\left(c_\uparrow^\dagger c_\downarrow - c_\downarrow^\dagger c_\uparrow\right) \\ S^z &= \frac{1}{2}\left(c_\uparrow^\dagger c_\downarrow - c_\downarrow^\dagger c_\uparrow\right). \end{aligned}$$

Hinweis : Prüfen Sie die Kommutatorrelationen $[S^x, S^y] = iS^z$, $[S^y, S^z] = iS^x$ und $[S^z, S^x] = iS^y$.

2.2 Bosonische Systeme

Seien a, b zwei bosonische Operatoren.
1) Zeigen Sie, dass der Spinoperator $\overrightarrow{S}$ sich schreiben lässt als:

$$S^+ = a^\dagger b \quad , \quad S^- = \left(S^+\right)^\dagger \quad , \quad S^z = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a - b^\dagger b\right) \tag{7.4}$$

mit $S^\pm = \frac{1}{2}\left(S^x \pm iS^y\right)$

Hinweis : Prüfen Sie die Kommutatorrelationen $[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm$, $[S^+, S^-] = 2S^z$.

2) Zeigen Sie unter Ausnutzung der bosonischen Kommutatorregeln, dass

$$|S, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^{S+m}}{\sqrt{(S+m)!}} \frac{(b^\dagger)^{S-m}}{\sqrt{(S-m)!}} |0\rangle \tag{7.5}$$

Eigenvektoren der Operatoren S^z und $\vec{S}^2$ sind.

Hinweis : $|S, m\rangle \equiv |n_a, n_b\rangle$ mit $n_a = S + m$, $n_b = S - m$.

2.3 Ferromagnet

Das Heisenbergmodell eines Ferromagneten wird durch folgenden Hamiltonoperator definiert:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{l,l'} J(|l - l'|) S_l \cdot S_{l'}, \tag{7.6}$$

wobei l und l' nächste Nachbarn in einem Gitter sind. Durch die *Holstein-Primakoff-Transformation*

$$\begin{aligned} S_i^+ &= \sqrt{2S}\varphi(\hat{n}_i) a_i \\ S_i^- &= \sqrt{2S} a_i^+ \varphi(\hat{n}_i) \\ S_i^z &= S - \hat{n}_i, \end{aligned} \tag{7.7}$$

mit $S_i^\pm = S_i^x \pm i S_i^y$, $\varphi(\hat{n}_i) = \sqrt{1 - \frac{\hat{n}_i}{2S}}$, $\hat{n}_i = a_i^+ a_i$ und $\left[a_i, a_j^+\right] = \delta_{ij}$ sowie $[a_i, a_j] = 0$ wird der Hamiltonoperator auf Bose-Operatoren a_i transformiert.
1) Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen für die Spinoperatoren erfüllt sind.
2) Stellen Sie den Hamiltonoperator bis in 2.ter Ordnung (harmonische Näherung) durch die Bose-Operatoren a_i dar, indem Sie die Wurzeln in den obigen Transformationen als Abkürzungen für die Reihenentwicklung auffassen.
3) Diagonalisieren Sie H (durch eine Fouriertransformation) und bestimmen Sie die Dispersionsrelation der Spinwellen (=Magnonen).