9. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

Abgabe: bis zum *14.Dez.2009, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger

1 Schwach wechselwirkende Bosonen: einige technische Aspekte der Bogoliubov-Transformation

Wir untersuchen den folgenden Hamiltonoperator ($\hbar = 1$), der N wechselwirkende Bosonen im Volumen V beschreibt:

$$H = \sum_k \frac{k^2}{2m} a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2V} \sum_{k,p,q} V_q a_{k+q}^\dagger a_{p-q}^\dagger a_p a_k, \tag{9.1}$$

wobei die Erzeuger $a_k^\dagger$ und Vernichter a_k bosonische Kommutatorrelationen erfüllen und V_q die Fouriertransformierte des Zweiteilchenwechselwirkungspotentials $V_q = \int d^3x e^{-iqx} V(x)$ ist.
Unter den in der Vorlesung gezeigten Bedingungen und dem Isolieren der $k = 0$ -Mode lässt sich (9.1) in quadratischer Ordnung approximieren durch:

$$H = \frac{N^2}{2V} V_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{k^2}{2m} a_k^\dagger a_k + \frac{N}{V} \sum_{k \neq 0} V_k a_k^\dagger a_k + \frac{N}{2V} \sum_{k \neq 0} V_k \left(a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k} \right) + \mathcal{O}(a_k^3). \tag{9.2}$$

Um (9.2) zu diagonalisieren wenden wir eine Bogolioubov-Transformation an:

$$\begin{aligned} a_k &= u_k \alpha_k + v_k \alpha_{-k}^\dagger \\ a_k^\dagger &= u_k \alpha_k^\dagger + v_k \alpha_{-k}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

mit $u_k, v_k \in \mathbb{R}$ und

$$u_k^2 - v_k^2 = 1. \tag{9.4}$$

1) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\alpha_k, \alpha_k^\dagger$ aus (9.3) mit der Bedingung (9.4) bosonische Kommutatorrelationen erfüllen:

$$\begin{aligned} [\alpha_k, \alpha_{k'}] &= [\alpha_k^\dagger, \alpha_{k'}^\dagger] = 0 \\ [\alpha_k, \alpha_{k'}^\dagger] &= \delta_{kk'}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

2) Drücken Sie H als Funktion der Operatoren $\alpha_k, \alpha_k^\dagger$ aus und zeigen Sie, dass H diagonal ist in dieser Darstellung *unter der Annahme, dass*

$$\left(\frac{k^2}{2m} + n V_k \right) u_k v_k + \frac{n}{2} V_k (u_k^2 + v_k^2) = 0 \tag{9.6}$$

mit $n = N/V$.

3) Bestimmen Sie u_k, v_k aus den Relationen (9.4) und (9.6).

4) Geben Sie die endgültige Form des Hamiltonoperators an und diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme.

5) Studieren Sie den Fall $V(x) = \lambda \, \delta(x)$.

2 Mean-Field Theorie des BCS Hamiltonoperators

In dieser Aufgabe wird der BCS Hamiltonoperator im Rahmen der sogenannten Mean-Field Näherung untersucht. In dieser Näherung ist der mikroskopische Bogoliubov Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung gegeben durch

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_k \left[\sum_\sigma \xi_k c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} - \left(\Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \Delta c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} \right) \right] + \frac{|\Delta|^2}{g}, \tag{9.7}$$

mit $\xi_k = \epsilon_k - \mu$ und dem durch die folgenden selbstkonsistenten Gleichungen gegebenen komplexen Ordnungsparameter Δ: $\Delta = g \sum_k \langle \text{g.s.}| c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} | \text{g.s.} \rangle$, $\Delta^* = g \sum_k \langle \text{g.s.}| c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} | \text{g.s.} \rangle$. $|\text{g.s.}\rangle$ bezeichnet dabei den Grundzustand des Systems. In der **Nambu Spinor Darstellung**

$$\Psi^\dagger_k = \begin{pmatrix} c^\dagger_{k\uparrow} & c_{-k\downarrow} \end{pmatrix}, \;\; \Psi_k = \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c^\dagger_{-k\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{9.8}$$

kann der Hamiltonoperator umgeformt werden zu:

$$\hat{H} = \sum_k \left[\Psi^\dagger_k \begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_k \end{pmatrix} \Psi_k + \xi_k \right] + \frac{|\Delta|^2}{g}. \tag{9.9}$$

1) Zeigen Sie unter der Annahme eines reellen Ordnungsparamters Δ, dass der Hamiltonoperator durch eine unitäre Transformation diagonalisiert werden kann zu

$$\hat{H} = \sum_{k\sigma} \lambda_k \alpha^\dagger_{k\sigma} \alpha_{k\sigma} + \sum_k (\xi_k - \lambda_k) + \frac{|\Delta|^2}{g} \tag{9.10}$$

mit

$$\begin{pmatrix} \alpha^\dagger_{k\uparrow} \\ \alpha_{-k\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ \sin\theta_k & -\cos\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^\dagger_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow} \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

und $\lambda_k = \left(\xi_k^2 + \Delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
Die Anregungen des supraleitenden Systems sind als **Bogoluibonen** bekannt und werden durch die Operatoren $\alpha^\dagger_{k\uparrow}$ und $\alpha^\dagger_{-k\downarrow}$ erzeugt. Obiger Hamiltonoperator zeigt, dass die Quasiteilchen eine Mindestenergiebarriere von Δ besitzen.
2) Der Grundzustand des Systems kann als Funktion der Quasiteilchenoperatoren geschrieben werden als $|\text{g.s.}\rangle = (\prod_k \alpha_{k\uparrow} \alpha_{-k\downarrow}) |\Omega\rangle$, dabei bezeichnet $|\Omega\rangle$ den Vakuumzustand. Zeigen Sie, bis auf einen konstanten Faktor gilt:

$$|\text{g.s.}\rangle = \left(\prod_k \alpha_{k\uparrow} \alpha_{-k\downarrow} \right) |\Omega\rangle \sim \left(\prod_k \left(\cos\theta_k - \sin\theta_k c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} \right) \right) |\Omega\rangle. \tag{9.12}$$

Zeigen Sie weiter, dass die rechte Seite von (9.12) normiert ist und berechnen Sie einen Ausdruck für die Grundzustandsenergie.
3) Drücken Sie die gewöhnlichen Elektronoperatoren als Funktion der Quasiteilchenoperatoren (Bogoluibonen) aus und folgern Sie aus $\Delta = g \sum_k \langle \text{g.s.}| c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} | \text{g.s.} \rangle$ eine selbstkonsistente Gleichung für Δ, die sogenannte BCS-Gap Gleichung.