1. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 28.10.2015 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*4 Punkte*] **Vier-Teilchen-System**

Ein abgeschlossenes System aus vier unterscheidbaren Teilchen habe die Gesamtenergie $E_{ges} = \sum_{i=1}^{4} E_i = 4\varepsilon$. Die Energie jedes einzelnen Teilchens ist ein Vielfaches der Energie ε:

$$E_j = n_j \cdot \varepsilon;\ j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$$
$$n_j = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4 \quad .$$

Ein Mikrozustand r ist folglich durch $r = (n_1,\, n_2,\, n_3,\, n_4)$ gegeben. Wie viele Mikrozustände gibt es? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten p_r werden die einzelnen Mikrozustände eingenommen?

2. [*6 Punkte*] **Stirling-Formel**

Eine in der statistischen Physik häufig verwendete Formel ist die sogenannte Stirling-Formel

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N + \ln(\sqrt{2\pi N}) \quad \text{bzw.} \quad N! \approx \sqrt{2\pi N}\, \left({}^{N}\!/_{e}\right)^N$$

für $N \to \infty$.

2 (a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass für ganze Zahlen $N \geq 0$ gilt:

$$\Gamma(N+1) = N! \quad \text{mit } \Gamma(N) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{N-1} \quad .$$

1 (b) Die Funktion $g_N(x)$ sei definiert durch

$$N! = \int_0^\infty dx\, \exp(N g_N(x))\,.$$

Geben Sie $g_N(x)$ an.

1 (c) Berechnen Sie die Lage x_0 des Maximums der Funktion $\exp(N g_N(x))$. Führen Sie eine Taylorentwicklung von $g_N(x)$ um x_0 bis zur zweiten Ordnung durch.

2 (d) Leiten Sie nun die Stirling-Formel her und berechnen bzw. schätzen Sie den (relativen) Beitrag des Terms $\ln(\sqrt{2\pi N})$ für $N = 2,\, 69,\, 10^{20}$ ab. Hinweis: Benutzen Sie (c).

1 (e) Zeigen Sie nun, dass im Fall großer N gilt: $N! \approx \left({}^{N}\!/_{e}\right)^N$.

3. [*6 Punkte*] **Volumen der n-dimensionalen Kugel**

Das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R lässt sich über das Integral

$$V_n(R) = \int dV_n = \underbrace{\int dx_1 \ldots \int dx_n}_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2}$$

bestimmen, wobei dV_n das n-dimensionale Volumenelement in sphärischen Kugelkoordinaten bezeichnet und R den Radius der n-dimensionalen Kugel darstellt.

1 (a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n(R) = V_n(1)\, R^n$$

gilt, wobei $V_n(1)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

Dipl. Phys. Karsten Schwarz, E2 6, Zi.1.04 corsa@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2 6, Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de

$\boxed{1}$ (b) Geben Sie mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil (a) das Volumenelement dV_n in Abhängigkeit von $V_n\left(1\right)$ an. Wie kann aus dV_n das Volumen V_n berechnet werden und welche Bedeutung hat dabei der von R unabhängige Anteil?

$\boxed{2}$ (c) Um nun konkret $V_n\left(1\right)$ zu bestimmen, berechnen Sie das Integral

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_n \, e^{-\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)}$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n\left(1\right)$ mithilfe der Gammafunktion $\Gamma\left(x\right) = \int\limits_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^{x-1}$ aus.

$\boxed{1}$ (d) Zeigen Sie nun, dass für das Volumen der n-dimensionalen Kugel

$$V_n\left(R\right) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(n/2+1\right)}$$

gilt, wobei $n/2\,\Gamma\left(n/2\right) = \Gamma\left(n/2+1\right)$ ist.

$\boxed{2}$ (e) Wir definieren nun

$$f_n\left(\alpha\right) := \frac{V_n\left(\left(1+\alpha\right)R\right) - V_n\left(R\right)}{V_n\left(R\right)} \quad .$$

Was ist die physikalische Bedeutung von $f_n\left(\alpha\right)$? Zeigen Sie die Gültigkeit der Approximation $f_n\left(\alpha\right) \approx \exp\left[\alpha n\right] - 1$ für $0 < \alpha \le 1$ und $n \to \infty$.

4. [*4 Punkte*] **Phasenraumvolumen**

Betrachten Sie N ununterscheidbare, nicht wechselwirkende Teilchen in zwei Raumdimensionen, die auf die Fläche A eingesperrt sind. Berechnen Sie das Phasenraumvolumen aller Zustände der Energie $E \le E_{max}$ und zeigen Sie, dass sich das Phasenraumvolumen für $N \to \infty$ in der äußeren Kugelschale $\lim\limits_{\delta E \to 0} E_{max} - \delta E < E < E_{max}$ konzentriert.

Dipl. Phys. Karsten Schwarz, E2 6, Zi.1.04 corsa@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2 6, Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de